DisVIMat

El estudiante ciego dibujando en el aula de Matemáticas

Dibujo sobre lámina de caucho

9. DEMOSTRACIONES VIVAS, GRACIAS AL DIBUJO.

©José Enrique Fernández del Campo
jefdelcampo@gmail.com
http://disvimat.net

Madrid, 2020

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

De ordinario, los textos presentan las construcciones y demostraciones geométricas como obras de arte terminadas. Que pueden contemplarse, que deben comprenderse y –frecuentemente- aprenderse; no sólo el resultado –teorema objeto de la demostración-, sino que llega a exigirse la demostración misma.
Parecen frescos fosilizados. Cuando en realidad son filmes de personajes vivos, que han ido apareciendo en escena en momentos distintos, entrando en el juego cuando se les reclamaba.

En Didáctica de la Matemática hay algo mucho más atrayente y formativo que "aprender resultados": construir la demostración por uno mismo, como camino que conduzca a una meta. Meta incluso no formulada, no explícita: conjeturada o semi-conjeturada. Como un manojo de desafíos.

No se trata solamente de ayudar a comprender un resultado, ni su demostración. Sino de "descubrirlos", de "construirlos por uno mismo".
En pasar de simple observador o estudioso a "aprendiz de investigador".

Se muestran aquí tres ejemplos inocentes, comprimidos en el tiempo.
Advertencia: en la práctica, no se regalarían resultados ni respuestas, salvo en caso de "bloqueo extremo".

Se aprovecha la ocasión para ejercitarse en una descripción verbal del proceso gráfico.

Sirvan estas páginas como homenaje personal a Pedro Puig Adam, quien me ayudó a descubrir la "Didáctica matemática heurística". Y a Miguel de Guzmán Otamiz, quien me mostró el camino de cómo aprovechar los juegos para la investigación -la "Matemática Recreativa"-. Lubreras que siguen luciendo en el cielo de la Didáctica de la Matemática.

9.1 LOS TRIÁNGULOS Y SUS ÁNGULOS.
9.1.1 Fases experimental y conjetural.

Frente a la formulación cruda:

"Los ángulos de un triángulo suman dos ángulos rectos (un llano, 180°)"

Puede sugerirse la experimentación gráfica:

1º) Dibuja triángulos obtusángulos, de ángulos obtusos cada vez mayores…
2º) Observa qué sucede con los otros dos ángulos, agudos… (son cada vez menores)…
3º) ¿Qué acabaría ocurriendo con el ángulo obtuso?… (Se aproximaría al llano)…
4º) ¿Y que sucedería con los dos agudos?…
5º) ¿Y entre los tres?

Puede repetirse la experiencia, alejando un vértice. Por ejemplo: el superior, en un dibujo cualquiera. Planteando entonces cuestiones:
"A medida que se aleja el vértice: ¿qué sucede con los dos ángulos contiguos al lado fijo?…
"¿Y con el del vértice que se aleja?…"
Intenta dibujar un triángulo con dos ángulos rectos…
¿Por qué?

9.1 LOS TRIÁNGULOS Y SUS ÁNGULOS.
9.1.2 Fases demostrativa y de generalización.

Intentemos comprobar si eso es siempre cierto:

Dibujando un triángulo cualquiera:

6º) Prolongamos uno de los lados por un extremo, por el vértice…
7º) Y, por ese vértice, trazamos también la paralela a su lado opuesto.
8º) Si se estudiaran los ángulos que allí se forman…
¡a lo mejor tienen algo que ver con los del propio triángulo!…
No basta afirmarlo: hay que comprobarlo, buscar el “por qué”.
9º) ¿Qué podría decirse entonces de los ángulos de ese triángulo?…
10º) Esto mismo: ¿ocurrirá en todos los triángulos?; ¿o solamente en el tuyo?…
(La respuesta está favorecida cuando es una tarea grupal.)

(La –digamos- demostración de este resultado categórico –o proposición equivalente a la igualdad de ángulos correspondientes- debería situarse al tratar los triángulos: como su propiedad o resultado fundamental.)

9.2 LOS PARALELOGRAMOS Y SUS DIAGONALES.
9.2.1 Fases experimental y conjetural.

¿Qué ocurre con las diagonales de los paralelogramos?...
¿Es que les sucede algo?...
¡Vamos a investigarlo!

1º) Dibujemos ejemplares de los distintos tipos de paralelogramos.
No importan ni posiciones, ni dimensiones, ni proporciones de sus lados (pero que estén todos los tipos...).

2º) Ahora, sus diagonales...

3º) ¿Qué podríamos decir que les ocurre a las diagonales, en todos los casos?...

4º) Se cortan, sí. Pero...: ¿cómo se cortan?...
(En el centro, no. Que –por ejemplo- en el rombo no está a igual distancia de los cuatro vértices...)

9.2 LOS PARALELOGRAMOS Y SUS DIAGONALES.
9.2.2 Fases demostrativa y de generalización.

Vamos a intentar comprobarlo.
5º) Nos situamos en el caso más general: el paralelogramo más irregular. Un ...cualquiera.

6º) ¿Qué ocurre con los triángulos que se forman...
Elige dos, que parezcan más fáciles de estudiar y comparar.
7º) Los ángulos?...: ¿Cómo son los ángulos de esos triángulos?...
¿Seguro?...
¿Por qué?...
8º)¿Y los lados?...
¿Seguro?...
(Obsérvese que este paso exigiría en puridad conocer los "Criterios de igualdad de triángulos".)
9º) Entonces: ¿qué les ocurre a las diagonales?...
10º) ¿Será así en todos los romboides, o sólo en el tuyo?...
11º) ¿Y también en todos los paralelogramos?...

Enhorabuena: has descubierto algo que no viene en todos los libros.

9.3 PARTICIONES DE UN CUADRADO
9.3.1 Preparación del escenario

Aunque es mucho más enriquecedora y motivante la fórmula manipulativa, también es posible la demostración gráfica. Sin necesidad de dedicar tiempo para cortar escenarios ni piezas móviles.

Un primer desafío:

1º) Cortar un cuadrado por dos paralelas a los lados, de forma que aparezcan dos cuadrados…
(¡Nadie ha dicho que tengan que ser iguales! Aunque pueden serlo…)

2º) ¿Estás seguro que esas dos regiones son cuadrados?…

3º) Además de esos dos cuadrados, aparecen también…
¿Seguro que son…?

Otro desafío, más sencillo:

4º) Trazar una diagonal en cada rectángulo, pero que solamente una contenga al punto de intersección interior, donde se cortan las paralelas que dibujaste.

5º) ¿En qué figuras está ahora partido en total el cuadrado inicial?
¿Estás seguro que esos cuatro … son…?

9.3 PARTICIONES DE UN CUADRADO

9.3.2 Patinaje artístico-matemático: fase combinatoria (experimental).

Ahora, un terremoto. O un puzzle:

6º) Deslizar tres de esos triángulos, hasta conseguir que aparezca un único cuadrado y los cuatro triángulos…

(Si hay dudas en el término deslizar “muévelos, pero sin que cambien de posición respecto a ti: sin girarlos”.)
(El paso más laborioso del proceso, el que exigirá más tiempo.)

7º) ¿Te atreves a afirmar que es eso un cuadrado?…:
¿Por que?… ¿No puede ser también un…?

La indicación o condición de *deslizamiento* no tiene otra finalidad que la de facilitar la tarea, reducir el tiempo exigido. De hecho, en la versión manipulativa no se menciona.

9.3 PARTICIONES DE UN CUADRADO

9.3.3 Conjetura y demostración.

8º) ¿Qué puede decirse de las figuras resultantes? ¿Tienen algo que ver con las del dibujo anterior?... Compara esas dos particiones del cuadrado general...

Si no se alcanza la respuesta solución:

9º)¿Podrías decir si hay alguna relación entre los dos cuadrados de la primera y el cuadrado único del final de la segunda?

10º) Por cierto: **¿Quiénes son los lados de esos cuadrados?**

11º) Haz el recorrido a la inversa, y fíjate si importan mucho, poco o nada las paralelas que dibujaste al principio, y qué sucedería si dibujaras otras diferentes...

Por cierto:

12º) ¿En qué segmentos repercute dónde se tracen las paralelas iniciales?
(Queda expedito el camino para las formalizaciones verbal y simbólica.)

Enhorabuena: has conseguido un importante resultado -y lo has demostrado-, muy práctico. Tan famoso que se le conoce por el nombre de su descubridor.