

DEL CÁLCULO MENTAL

José Enrique Fernández del Campo

Madrid, junio 2004

Del cálculo mental

José Enrique Fernández del Campo.

Primera edición: Madrid, 2004

© De esta edición: Organización Nacional de Ciegos Españoles (ONCE)
Dirección General. Dirección de Educación.
Calle del Prado, 24, 28014 Madrid

© El autor

Coordinador: Javier López del Río

Diseño de la cubierta: ONCE–Dirección de Comunicación e Imagen,
Gabinete de Diseño.

Realización de la edición: ONCE–Dirección de Cultura y Deporte.
Departamento de Recursos Culturales.

La presente edición ha estado al cuidado de Carmen Roig.

ISBN: 84-484-0148-4

D.L.:

Realización gráfica: INFORNET SYSTEMS. S.L.

Impreso en España – Printed in Spain

Dedicatoria

A mi amigo Luis,
Compañero de estudios,
Que me enseñó a no calcular...
Cuando así convenía.
Gracias a él, aquí estoy.

ÍNDICE

Presentación.....	11
1. EL CÁLCULO MENTAL EN EL CONTEXTO EDUCATIVO.....	15
1.1 El cálculo y la resolución de situaciones problemáticas.....	15
1.2 Un <i>triángulo de destrezas calculatorias básicas</i>	18
2. UN AMPLIO PANORAMA MOTIVACIONAL.....	21
2.1 Cotidianidad.....	22
2.2 Empleo interdisciplinar.....	22
2.3 Valor instrumental en las Ciencias Físico-matemáticas.....	23
2.4 Variedad de situaciones didácticas para su cultivo...	23
2.5 Graduabilidad.....	24
2.6 Comodidad y rapidez.....	24
2.7 Valor de consolidación de los «hechos numéricos elementales» y destrezas básicas.....	25
2.8 Fundamento de los algoritmos escritos.....	25
2.9 Detección de errores en cálculos efectuados por otros medios.....	25
2.10 Manifestación y ejercitación de aspectos estructurales.....	26
2.11 Familiarización con los números, su combinación, sus relaciones.....	27
2.12 Ocasión para ejercitar la creatividad e iniciativa personal.....	27

2.13 Ocasión para el desarrollo de estrategias de pensamiento.....	28
2.14 Desarrollo de la memoria inmediata.....	29
2.15 Ejercitación de la capacidad de concentración...	30
2.16 Ocasión para el desarrollo de la atención y agilidad mental.....	31
2.17 Ocasión para el ejercicio de la flexibilidad y apertura de mente.....	31
2.18 Prestigio social.....	32
2.19 Prestación social.....	32
2.20 Autosatisfacción.....	33
3. DIFICULTADES DIDÁCTICAS.....	37
3.1 Características del alumno.....	37
3.2 Evaluación del progreso en Cálculo Mental.....	40
3.3 Formación específica del profesor.....	45
3.4 Materiales.....	48
4. TÉCNICAS Y ESTRATEGIAS.....	50
4.1 Técnicas y estrategias para la adición.....	51
4.2 Técnicas y estrategias para la sustracción.....	59
4.3 Técnicas y estrategias para la multiplicación.....	65
4.4 Técnicas y estrategias para la división.....	73
4.5 Técnicas y estrategias para el cálculo de potencias..	77
4.6 Técnicas y estrategias para el cálculo de raíces.....	79
5. ESTIMAR, APROXIMAR.....	80
5.1 Consideraciones generales.....	80
5.2 Técnicas y estrategias.....	82
6. GRADACIÓN Y PREVISIONES CURRICULARES...	87
6.1 Principios didácticos.....	87
6.2 Previsiones curriculares.....	92
7. PROPUESTA DE EJERCICIOS GRADUADOS.....	104
7.1 Conteos.....	106
7.2 Órdenes de unidades.....	106
7.3 Sumas.....	107
7.4 Descomposiciones aditivas.....	111
7.5 Restas.....	113
7.6 Descomposiciones sustractivas.....	117

7.7	Multiplicaciones.....	118
7.8	Descomposiciones en productos.....	124
7.9	Divisiones.....	126
7.10	Descomposiciones en cocientes.....	130
7.11	Potencias.....	130
7.12	Raíces cuadradas.....	132
8.	PEQUEÑA LUDOTECA.....	134
a)	Sucesiones	138
1.	Tropiezos.....	138
2.	Pin.....	139
3.	Despertando cucos.....	140
4.	La escalera.....	140
5.	La pirámide.....	141
B)	Construcción de expresiones numéricas	141
6.	Permutaciones.....	141
7.	El número que crece.....	142
8.	Crece hecho un lío.....	143
9.	Crece cabeza abajo.....	143
10.	El orden protegido.....	143
11.	Muertos y heridos.....	144
C)	Construcción de números mediante operaciones	144
12.	El príncipe que prohibió una cifra.....	144
13.	El príncipe que se enamoró del 5.....	145
14.	Dos cincos.....	146
15.	Las dos cifras del destino.....	146
16.	Tresy dós.....	147
17.	Cincocincos.....	147
18.	La magia de un año.....	148
19.	La clave desintegradora.....	148
20.	El monolito.....	150
21.	Desvelar el secreto.....	150
22.	El número fantasma.....	151
23.	La diana.....	151
D)	Cadenas	152
24.	Tenis matemático.....	152
25.	Fútbol matemático.....	153
26.	Ping-pong matemático.....	154
27.	Por despistado!.....	155
E)	Otros juegos. Aprovechamiento marginal	156
28.	Las torres de Hanoi.....	156

29. Nim.....	157
30. Divide y vencerás.....	157
31. Sol y sombra.....	158
32. Ladrones honrados.....	159
33. Una a una.....	159

PRESENTACIÓN

El cálculo es, ante todo, cálculo mental. Su primera forma en la vida de cada hombre. La más independiente, universal y estimada. La más próxima al ser de la Matemática.

—«Aparte de la preferencia por lo manipulativo en geometría, ¿qué otros aspectos de la didáctica de la matemática son característicos de la enseñanza de ciegos?»

Esta pregunta, que entonces escuché poniéndole un filtro de simple cortesía o curiosidad por parte de un colega con quien hablaba por primera vez, me abriría, sin saberlo, un horizonte de interrogantes e inquietudes que aún no se ha cerrado. Los años transcurridos desde aquel verano de 1989, en Cuenca, me han demostrado que la pregunta nacía de un interés y aprecio verdaderos, y que llevaban el sello del investigador experimentado.

La educación de ciegos, al ver mermada la comunicación de soporte visual, tal vez podría resaltar dificultades y recursos «invisibles a la luz». Algo así como senderos difuminados y aún perdidos para el espectro visible, que sólo se muestran a los rayos infrarrojos.

No podía eludir pregunta tan directa. En aquel Seminario, se supone era el único representante presuntamente cualificado en Didáctica de la Matemática para ciegos. Y el atrevimiento puso palabras a un reflejo de imaginación:

—«El cálculo mental, quizás. Aunque la matemática es accesible para una persona ciega en igualdad de condiciones que para una persona que ve; salvo en aspectos instrumentales y -muy escasamente- didácticos... Pero el recurso al cálculo mental facilita sobremanera el trabajo, al dispensar con frecuencia del empleo de instrumental de cálculo que, por lo general, es lento y fatigante...»

—«Entonces, dedicaréis tiempo a cultivarlo, ¿no?... ¿Seguís algún método especial?... Porque la literatura es muy escasa en ese terreno.»

Métodos. Programación. Actividades.

Pese a que hayan transcurrido casi quince años desde aquella conversación, estas páginas pretenden una respuesta, aunque modesta. Bien que caería en la tentación de mostrar anticipos en otros lugares.

La finalidad primordial es poner a disposición de los educadores que tienen relación con estudiantes ciegos de Primaria y Secundaria un material que pueda contribuir a desarrollar en ellos destrezas calculatorias... -no sé decirlo de otra manera- ...**autónomas**. Esto es: prescindiendo de la escritura, la calculadora o cualquier instrumental específico de cálculo aritmético.

Pero el trabajo no podía reducirse a un puñado de actividades, o a fijar niveles mínimos a lo largo del currículo.

Tras un breve encuadre del papel del cálculo mental en la escuela (Capítulo 1), había que intentar justificar la consideración que merece, más allá de la simple *comodidad instrumental*. El Capítulo 2 ofrece como un verdadero argumentario en favor del cálculo mental, ya sean personas ciegas o videntes quienes de él se sirvan. La presentación es en forma de *motivaciones*, con referencia a sus efectos benéficos.

Y había también que buscar justificación a su ausencia en el quehacer de aula como forma individualizada en objetivos y tareas, o la carencia de sistematicidad. El capítulo 3 inten-

ta mostrar un panel de *dificultades didácticas*, no fácilmente soslayables, pero que no alcanzan la categoría de eximentes ni disculpas.

El capítulo 4 -el de contenido más claramente matemático- intenta recopilar y clasificar técnicas y estrategias aplicables con cada una de las operaciones aritméticas, prolongado en el capítulo 5 por las técnicas de aproximación y estimación. No todas son empleadas por los *buenos calculistas*, ni todas tienen igual grado de eficacia general; su utilidad dependerá de la situación a resolver. En cualquier caso, se trata de un muestrario ejemplificado, al que puede acudir en busca de sugerencias.

La parte más propiamente didáctica la constituyen los capítulos 6 y 7. A una exposición de «Principios Didácticos», sigue una breve consideración sobre objetivos terminales para las distintas etapas y aún niveles educativos, que se plasmará en el capítulo 7 con una colección graduada de más de 260 situaciones numéricas. Puede calificarse de «guía didáctica», con señalamiento de destrezas/objetivo por operaciones, niveles educativos y dominios numéricos.

La inevitable «pequeña ludoteca» del capítulo 8 recoge algunas sugerencias para el diseño de situaciones dinámicas que pueden incitar al alumno al cultivo del cálculo mental, al margen de contextos reglados, adaptadas a sus necesidades perceptivas; como es lógico, válidas también para estudiantes sin problemas visuales. La matemática recreativa es, sin duda, matemática, y su acento dulce puede ayudar a mitigar el esfuerzo amargoso que exige siempre el quehacer abstracto.

Terminado el trabajo, me pregunto qué hay de *específico de la educación de ciegos* en estas páginas. Y no sé si debo sonrojarme o alegrarme.

Sólo una cosa: la intención. Espero que sea de alguna utilidad, directa o indirectamente, a los estudiantes ciegos y deficientes visuales; que desarrollen *antes, más y mejor* -como reza el adagio italiano- sus habilidades de cálculo

mental; que sean más ágiles, capaces y seguros al calcular de forma autónoma, sin recurso a medios materiales.

Por otra parte, no me extraña: la matemática es la misma, con vista o sin ella. Y es también idéntica la matemática que tienen que aprender y usar en la escuela los estudiantes todos, tengan o no dificultades de visión.

1. EL CÁLCULO MENTAL EN EL CONTEXTO EDUCATIVO

1.1 El cálculo y la resolución de situaciones problemáticas

Calcular es obtener números nuevos a partir de otros dados, utilizando las operaciones aritméticas.

La adquisición de técnicas de cálculo debe permitir resolver problemas y también aumentar y profundizar en el conocimiento de los números y de las operaciones. Este conocimiento debe favorecer la flexibilidad y también la creación de rutinas de cálculo personal adaptadas a la neutralidad y a los conocimientos previos del alumnado.

Calcular responde a una necesidad de resolución, la práctica sistemática fuera de contexto acaba perdiendo sentido y no se logra ninguno de los objetivos.¹

Pero el cálculo no queda limitado en su valor *instrumental*. Por el contrario: toma un valor esencial en el campo educativo. Un problema no queda resuelto mientras no se alcance la solución cuantitativa, si éste es el caso.

Al resolver situaciones problemáticas, las etapas de comprensión del enunciado (o percepción de la situación), representación/traducción, abstracción y razonamiento son, sin lugar a dudas, las más profundas y complejas; y la solución es imposible sin ellas. Pero quedarían estériles si no fuera posible alcanzar y expresar la respuesta correcta. En las situaciones de carácter cuantitativo, esta respuesta es un número, a calcular a partir de los datos.

Los cálculos pueden efectuarse:

a) Con ayudas manipulativas. Sean los propios dedos, material general (cuentas, botones, legumbres, palillos, etc.) o específico (bloques multibase, ciertos ábacos, etc.).

¹ ALSINA C., C. BURGUES, J. M. FORTUNY, J. GIMENEZ, M. TORRA (1996): Enseñar Matemáticas. Ed. Graó, Barcelona; pág. 113.

b) Con ayudas gráficas. Que van desde simples colecciones de trazos, constelaciones de puntos, figuras diversas, hasta diagramas constructivos, ábacos gráficos, etc.

c) Mentalmente.

d) Con ayuda de escritura simbólica (guarismos). Entre las que se encuentran los algoritmos tradicionales.

e) Con ayuda de instrumental específico: electrónico o mecánico (calculadora, ábaco chino-japonés, Tinkunako).

Ayudas o soportes calculatorios

Manipulativos	Dedos		
	Material general	Legumbres Botones Palillos...	
	Material específico	No estructurado	Tira numérica Cuadro numérico
			Ábacos de repres. Regletas Cousseniaire Bloques multibase
Gráficos	No estructurado	Colecciones de trazos Constelaciones de puntos	
	Estructurado	Diagramas constructivos Ábacos gráficos...	
Escritura simbólica	Simple	Listados Tablas de <i>hechos numéricos</i>	
	Compleja	Algoritmos escritos	
Instrumentos específicos	Mecánicos	Ábacos Calculadoras manuales....	
	Electrónicos	Calculadoras Programas informáticos	

Mental puro	Inmediato o automatizado	Evocación de <i>hechos numéricos</i> Evocación de listados	
	Pensado (actuación sobre repres. Int. de situaciones)	Verbalización Escritura simbólica Físicas Manipulativas Gráficas	

La elección de una u otra forma o soporte calculatorio viene condicionada por factores varios:

La «tendencia»: cómo se vienen realizando los cálculos en situaciones análogas inmediatas anteriores.

La vía marcada o sugerida por la representación interior de la situación, que, a su vez, es fruto de la «tendencia» en la actividad representativa.

Disponibilidad del material o instrumental adecuado; incluido el de escritura/dibujo para procedimientos escritos o gráficos.

La naturaleza de los datos: salvo una destreza notable en cálculo mental o artificios muy determinados de cálculo manipulativo o gráfico, las cantidades de tamaño «grande» (según el nivel), las expresiones decimales y fraccionarias exigen el empleo de calculadora o algoritmos escritos.

La confianza del resolutor en cada una de las formas de cálculo personal.

La condición señalada, en su caso, por la demanda: «mediante cálculo mental...», «ayudándote de... (ábaco, caja de aritmética, material...), «por escrito...», etc.

Lo que no significa que la ejecución se realice necesariamente en una determinada forma: se inicia el camino por una de ellas, pero puede revocarse, para elegir otra que apunta como más cómoda o segura; con independencia, incluso, de la condición de demanda: ya se traducirá, si es posible y necesario.

A mayor libertad de elección -a mayor nivel de destrezas en las diferentes formas de cálculo-, mayores posibilidades de avanzar y culminar con éxito -subjetivo, al menos- el proceso de solución. Esto implica:

Capacidad para traducir la situación a términos del lenguaje operatorio. En última instancia:

Capacidad para traducir expresiones entre lenguajes operatorios.

Capacidad operatoria real en dicho lenguaje.

Aparece así toda una gama de destrezas calculatorias, verdaderos objetivos didácticos.

Como es obvio, en los itinerarios didácticos de iniciación se aprovechan sinergias entre las diferentes destrezas: importan las «traducciones» entre los diferentes lenguajes o transformaciones, mucho más que en la pura resolución de problemas, donde éstas son refuerzos o comprobaciones.

Al tratar de introducir el concepto de adición, por ejemplo, carecería de sentido acudir a la escritura numérica, o al cálculo mental de la suma directa. En cambio, pueden efectuarse sumas para valores pequeños -antes incluso de denominarlas «sumas»-, sirviéndose de recuento de dedos u otros objetos, material diverso, recursos gráficos, conteo mental o sus combinaciones.

Por el contrario, la introducción de una determinada técnica de cálculo mental puede partir de la observación de descomposiciones en cálculo escrito, resultados por calculadora, etc. La confección de las *tablas de hechos numéricos* se efectúa por lo general mediante cálculo mental o manipulación física o gráfica...

1.2 UN TRIÁNGULO DE DESTREZAS CALCULATORIAS BÁSICAS

Secularmente, hablar de *cálculo aritmético* era sinónimo en la práctica de *cálculo escrito*. *Saber calcular* equivalía a *saber aplicar algoritmos escritos de cálculo*.

Desde hace veinte o veinticinco años, es creciente el interés por el cálculo mental. Incluso por la «aproximación» y «estimación» como formas de cálculo. En España, ha llegado a plasmarse como verdadero objetivo curricular (véase: «Elementos básicos del currículo de Educación Primaria», Ministerio de Educación, Ciencia y Deporte, D.830/2003). Su expresión y control más inmediatos son la verbalización de resultados.

La calculadora ha dejado de ser considerada como *cómplice y encubridora de impericias calculatorias del alumno*, para apreciarla como **aliada didáctica**. Es hoy un instrumen-

to que hay que conocer y saber utilizar, alcanzando la categoría también de objetivo curricular (ibíd). E incluso como material de enseñanza-aprendizaje del cálculo en sus estadios más elementales².

Se configura así un «Triángulo de Destrezas calculatorias»: Cálculo Escrito, Cálculo Mental y Cálculo por Calculadora. En esta última pueden considerarse incluidas las técnicas que se sirven de artefactos o dispositivos, manuales o mecánicos, que reducen la operatoria de cálculo a simples ejercicios dígito-manuales, conforme a reglas o normas de ejecución (ábaco chino-japonés, por ejemplo).

Esta terna de destrezas está presente en la vida toda -no sólo escolar- de nuestros alumnos, tanto de Secundaria como de Primaria, y estamos persuadidos de que seguirá creciendo en los próximos años. El interés didáctico se orienta en determinar el orden de aparición, dimensiones y ritmo de desarrollo de cada uno de los vértices y lados de este triángulo.

Cierto, que tradicionalmente no se ha tenido conciencia de tal triángulo. Incluso en numerosos ambientes, ni siquiera era posible. ¿De cuándo acá la calculadora? ¿Acaso no se efectuaban -y efectúan- cálculos aritméticos por personas y poblaciones -¡civilizaciones enteras!- no alfabetizadas o carentes de instrumental específico de cálculo?...

El cálculo mental

«¿Para qué fatigar la mente con prácticas que la calculadora resuelve sin esfuerzo?»

En el fondo, tal pregunta trasluce un desconocimiento de la realidad cotidiana y de las posibilidades intelectuales más elementales.

² Véase, por ejemplo:

ALSINA, C. (1989): La calculadora en la escuela.

GRUPO 0 (Ismael Blasco y otros), (1997): Matemáticas: materiales curriculares de Enseñanza Primaria (6-12 años): 1. Estructura y Materiales; 2. Primer Ciclo; 3. Segundo Ciclo; 4. Tercer Ciclo. MEC. Edelvives, Valencia.

*El desarrollo del cálculo mental puede considerarse como el objetivo último en el aprendizaje de las cuatro operaciones fundamentales*³.

La afirmación puede juzgarse un tanto maximalista. Pero no olvidemos que uno de los fines prioritarios de la educación es cooperar en el desarrollo de la autonomía personal del alumno. Autonomía que -para el cálculo aritmético- llega a su culmen en el cálculo mental, independiente de medios físicos, por simples que sean, como lápiz y papel, tiza o arena (por no decir calculadoras).

Por otra parte, su marginación -consciente o inconsciente- tiene efectos negativos. Es algo más que parcialidad: es opinión general, como se advierte en el prestigioso y realista Informe Cockroff:

*Creemos que la decadencia del trabajo oral y mental en las clases de Matemáticas son consecuencia de la falta de reconocimiento y la importancia que el cálculo mental tiene en esta asignatura; incluso los métodos de cálculo sobre papel utilizados tradicionalmente se basan en la realización mental de determinadas operaciones*⁴.

El itinerario de aparición de los vértices de nuestro «triángulo de destrezas calculatorias» parece claro: cálculo mental, escrito y por calculadora. Irán ubicándose cada uno con respecto a los otros, desarrollando y conformando la mayor o menor «escalenidad», útil y dinámica, en un juego de necesidades reales y conveniencias didácticas. Siempre con referencia a la realidad cotidiana y contextual; conforme a los datos a manejar, como recursos simultáneamente disponibles, nunca excluyentes, pres-tándose mutuos servicios.

³ FERNÁNDEZ BAROJA F., LLOPIS PARED A., y DE PABLO MARCO C. (1991): Matemáticas Básicas. Dificultades de aprendizaje y recuperación. Ed. Santillana, Madrid. Pág. 201.

⁴ COCKCROFT, W. S H. (1982): «Mathematics counts». Report of the Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools under the Chairmanship of dr. W. H. Cockcroft. London, England: Her Majesty's Stationery office. Pág. 92.

2. UN AMPLIO PANORAMA MOTIVACIONAL

Nos asisten razones de peso que justifican el análisis que aquí se recoge acerca del cálculo mental, su interés didáctico y técnicas concretas: la aplicación en la enseñanza de alumnos ciegos y el propósito de dotar a su profesorado de información específica.

Las dificultades instrumentales para el cálculo escrito y la mayor complejidad de uso de los instrumentos específicos de cálculo, hacen del cálculo mental la modalidad por excelencia para el alumno ciego. La motivación de «comodidad y rapidez» lo convierten en prevalente, muy por encima de las otras dos formas. Los rangos numéricos de cálculo son, en general, muy superiores a los habituales para alumnos videntes del mismo nivel. o edad. (Aunque se carece de constatación estadística, basta una simple visita a un aula donde haya un alumno ciego para comprobarlo inmediatamente.)

Bueno será recordar algunas de las aplicaciones más palmarias, aceptadas y eficaces y, por ello, fuentes de contagiosa motivación para el alumno -¡y para el profesor!...-

Basta una simple reflexión para aflorar multitud de aplicaciones prácticas del cálculo mental. Algunas de ellas revisiten el carácter inmediato de «estímulos motivacionales». Otras, lo adquieren con el uso habitual. Por último, algunas de ellas escapan a la percepción inmediata del alumno pero su valor didáctico y formativo confieren dimensiones tal vez impensadas a esta forma de cálculo, sobrepasando el carácter de pura destreza para tornarse medio de intervención pedagógica.

Consideraremos cuatro grandes grupos de argumentos educacionales:

- proximidad de las situaciones de aplicación
- ventajas didácticas específicas
- efectos didácticos generales
- efectos psicológicos y comportamentales.

2.1 Cotidianidad

Cualquiera de nosotros, ya ha ejercitado a media mañana una buena decena de veces su capacidad de cálculo mental, si no directamente, al menos como elemento corrector o de aproximación.

Y así, calcula exacta o aproximadamente los minutos que median entre la hora que marca su reloj digital y el comienzo o final de la clase, el importe de las consumiciones del grupo de compañeros en la cafetería, y las vueltas correctas, las páginas de un capítulo, sin más que mirar el índice, la cuantía absoluta de la subida de sueldo o el anunciado incremento del precio de un servicio, la repercusión efectiva del descuento prometido en un escaparate, etc.

La vida corriente de un ciudadano no importa de qué edad o condición está plagada de oportunidades para ejercitar el cálculo mental en provecho propio y ajeno. Las ocasiones, por repentinas y frecuentes, apenas si dan tiempo -ni falta que hace- al uso del lápiz y el papel o la calculadora.

El alumno tal vez no se enfrente a las mismas situaciones cotidianas que un adulto para ejercitar el cálculo mental (tampoco coincidirán para dos adultos); pero sí con otras muchas análogas. Situaciones de compra-venta, puntuaciones deportivas o de juegos, paginaciones, tiempos, previsiones de gasto, etc.

2.2 Empleo interdisciplinar

Y no sólo en las áreas más propiamente físico-matemáticas. Desde la determinación de los años de vida que disfrutó un rey, artista o personaje histórico de relieve, dadas sus fechas de nacimiento y muerte, hasta el tamaño relativo de un país respecto del nuestro, su densidad media, riqueza o producciones. Tal vez sea consecuencia de la creciente cuantificación que padecen todos los dominios del saber, pero es innegable la abundancia de cifras que «adornan» cualquier manual o documento de uso en los estudios secundarios o superiores.

A fin de cuentas, es una proyección de las situaciones de «vida diaria», concretadas a los campos del estudio y la cultura.

2.3 Valor instrumental en las ciencias físico-matemáticas

Aún más específico, mucho más frecuente en estos ámbitos, también.

Las primeras y más importantes situaciones las proporciona la resolución de problemas, sea como ensayo, estimación o cálculo efectivo. Pero, a medida que se progresa en el curriculum, ascendiendo de niveles educativos, la diversificación en las áreas experimentales multiplica las necesidades calculatorias, allí donde la matemática cobra un papel instrumental más claro.

En la Educación Secundaria es de uso permanente. Al margen de los tópicos más estrechamente relacionados con el cálculo: fracciones y proporciones, ecuaciones e inecuaciones, cálculos geométricos, polinomios, etc. La física y la química se ven forzadas al recurso al cálculo aritmético, facilitado o anticipado por el cálculo mental; especialmente, si la astucia y pericia del profesor o autor de las situaciones problemáticas propuestas así lo permiten, gracias a la sencillez de los datos. Y, en cualquier caso, como cálculo comprobatorio por estimación.

Estos tres grupos de situaciones o motivaciones surgen espontáneamente: ni siquiera es preciso crearlas; son tan frecuentes y próximas, que basta su mención para que sean aprovechadas como situaciones problemáticas. En cuanto a la sensibilización en el ejercicio del cálculo mental, toca al profesor advertir de su existencia, resaltándolas cuando surjan. Tal como la «fotografía matemática» invita a descubrir formas geométricas, las «agencias de detectives» y «reporteros matemáticos» descubren situaciones de Cálculo Mental en la vida corriente, dentro o fuera del aula.

2.4 Variedad de situaciones didácticas para su cultivo

Sean como unos «minutos de precalentamiento» -al inicio de cada clase- o las «competiciones de cálculo»; sean como

ejercitaciones ocasionales en el transcurso de la resolución de problemas -ensayo, estimación o cálculo efectivo-.

En especial, conviene recordar todo género de juegos y actividades propias de la «matemática recreativa» con base en el Cálculo. Desde los «solitarios» de programas informáticos, hasta los juegos de pequeño o gran grupo, verbales, con material ordinario, tableros, fichas y tarjetas peculiares, etc., que cada día proliferan más en las aulas y en el mercado.

2.5 Graduabilidad

En un triple sentido. Por una parte, *consiste en un conjunto limitado de hechos numéricos*¹. Por otra, *pueden hacerse aparecer y tratarse métodos relativamente sofisticados como compensación, descomposición, factorización, etc., incluso con combinaciones numéricas muy sencillas*². Finalmente, la dificultad de los cálculos es graduable por el tipo y tamaño de las cantidades involucradas.

Todo ello permite adaptar el nivel de dificultad a las posibilidades, curriculum y adiestramiento del alumno. Haciendo asequible el éxito, fomentando la seguridad en sí mismo y alejando el riesgo de fracaso sistemático.

2.6 Comodidad y rapidez

Puede parecer una futilidad: libra del esfuerzo de escribir, (Alsina y otros, 1996, 114) o de la tensión de acertar las teclas de la calculadora. Pero si se contempla bajo la perspectiva de la educación de los más pequeños o con problemas de motricidad dígito-manual, la observación está más que justificada. Y, dentro de los márgenes de destreza personal -allí donde está prescrito-, el cálculo mental supera en velocidad incluso al logrado mediante el empleo de la calculadora.

¹ GÓMEZ ALFONSO, B. (1988): Numeración y Cálculo. Ed. Síntesis, Madrid. Pág. 65.

² COCKCROFT, W. S H.: op. Cit., Pág. 114.

Otras aplicaciones no serán tan motivantes para el alumno, pero tienen un valor didáctico innegable.

2.7 Valor de consolidación de los «hechos numéricos elementales» y destrezas básicas

El cálculo mental se basa en la continua aplicación de resultados elementales; dicho de otra forma: evocación -consciente y orientada- de las «tablas de operaciones» o «hechos numéricos». Pero no sólo esto: «requiere ciertas habilidades -conteos, recolocaciones, compensaciones, descomposiciones, redistribuciones, etc.-, buscando sustituir o alterar los datos iniciales para trabajar con otros más cómodos, o más fáciles de calcular» (Gómez, 1988, 65)

2.8 Fundamento de los algoritmos escritos

«Incluso los métodos de cálculo sobre papel utilizados tradicionalmente se basan en la realización mental de determinadas operaciones»³. Habría que invertir los papeles: el cálculo escrito es una ampliación y ayuda al cálculo mental. Sin éste, aquél sería poco menos que inviable.

2.9 Detección de errores en cálculos efectuados por otros medios

Con tres detectores principales: cifra de las unidades de menor orden, resultado entre las de orden mayor y estimación global (por no mencionar las tradicionales “pruebas del 9” u otras análogas).

—Si al multiplicar por calculadora 437×1898 el resultado que apareciera fuese 823732, está claro que algo falla: en la cifra de las unidades debiera aparecer un «6» -fruto de « $7 \times 8 = 56$ »-; nunca un «2».

—En otros casos, pueden ser las cifras correspondientes a órdenes mayores las que denuncien el error. Sería un tanto extraño que 283×5469 nos diera 981727: al multi-

³ Cockcroft, W. S H.: op. Cit. pág. 92

plicar 2×5 , por muchas unidades del orden anterior que debiéramos añadir, nunca aparecería un 9... (tal vez se pulsó un «3» en lugar del «5» para «5469»...)

—Asimismo, si multiplicando 1248×3579 la respuesta fuese 43835592, en alguna parte nos hemos equivocado: «mil y pico, por tres mil y pico» andaría entre «tres millones» y «ocho millones», jamás por los «cuarenta y pico millones». (Obsérvese que aquí sí parecen satisfacerse los criterios de las «cifras extremas».)

2.10 Manifestación y ejercitación de aspectos estructurales

Al efectuar un cálculo mental -también escrito, aunque encubiertamente- se aplican propiedades definitorias de la correspondiente estructura algebraica: *conmutativa*, *asociativa*, *distributiva*, etc.-; mostrando, a su vez, la proximidad práctica de éstas: son algo más que *formalismos hueros*. Es decir, se alimenta una motivación recíproca entre *estructura* y *aplicabilidad*.

Así, al operar 12×37 , podemos descomponer:

$$(4 \times 3) \times 37 = 4 \times (3 \times 37) = 4 \times 111 = 444,$$

aplicando fructíferamente la propiedad asociativa; además, al efectuar 3×37 estamos empleando la *propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición*, junto con la *asociatividad de la suma*:

$$3 \times 37 = 3 \times (30 + 7) = 3 \times 30 + 3 \times 7 = 90 + 21 = (90 + 20) + 1 = 110 + 1 = 111,$$

Técnica habitual para reducir cantidades mayores a menores o buscar operandos más sencillos o familiares es la «descomposición»:

$$\begin{aligned} 12 \times 37 &= (4 \times 3) \times 37 \\ 3 \times 37 &= 3 \times (30 + 7) \end{aligned}$$

que algo o mucho tiene que ver con la *propiedad asociativa en sentido inverso* (*propiedad «disociativa»*), el primer

caso, o como paso intermedio de la *propiedad distributiva*, el segundo.

2.11 Familiarización con los números, su combinación, sus relaciones.

Como afirmaría Mialaret, tras una experiencia de tres meses:

*Hemos podido asistir a una especie de desarrollo de la imaginación numérica que nos ha sorprendido grandemente. Los alumnos no solamente calculaban deprisa y bien, sino que no vacilaban en recurrir a combinaciones cada vez menos corrientes*⁴.

Algunos autores (Sowder, 1990)⁵ hablan de un *tratamiento holístico preferente de la operación y de los operandos*. Lo que implica en general un conocimiento en profundidad de la naturaleza y características de operaciones y cantidades, más que de su expresión numeral o algorítmica. En el origen de este comportamiento se halla la diversidad de situaciones y estrategias aplicables a cada una: para un mismo número, y según el caso, se manejan números contiguos, descomposiciones aditivas y factoriales varias, su doble o mitad, etc.

También debe tenerse en cuenta otro grupo nada despreciable de motivaciones, de las que raramente se hace mención. Son, es cierto, menos claras en su aceptación generalizada, incluso en su valor didáctico. quizás por la no inmediatez de sus efectos y la consiguiente dificultad de comprobación objetiva.

2.12 Ocasión para ejercitar la creatividad e iniciativa personal

Una operación aritmética efectuada mentalmente no tiene, por lo general, una única vía de cálculo. Un sencillo ejemplo:

⁴ MIALARET, G. (1984): Las Matemáticas: cómo se enseñan, cómo se aprenden. Visor Aprendizaje Madrid. Pág. 59.

⁵ SOWDER (1990): «Mental computation and number sense», Arithmetic Teacher. 37, 18-20.

$7 + 5 = 7 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 12$ (con ayuda de representación interior o física de recuento de dedos)

$7 + 5 = (5 + 2) + 5 = 5 + (2 + 5) = (5 + 5) + 2 = 10 + 2 = 12$

$7 + 5 = (2 + 5) + 5 = 2 + (5 + 5) = 2 + 10 = 12$

$7 + 5 = 5 + 7 = 5 + (5 + 2) = (5 + 5) + 2 = 10 + 2 = 12$

$7 + 5 = 7 + (3 + 2) = (7 + 3) + 2 = 10 + 2 = 12$

$7 + 5 = 7 + (1 + 4) = (7 + 1) + 4 = 8 + 4 = 8 + (2 + 2) = (8 + 2) + 2 = 10 + 2 = 12$

$7 + 5 = (6 + 1) + 5 = 6 + (1 + 5) = 6 + 6 = 6 \times 2 = 12$

Tal vez el lector tenga otras. Pero, lo que es más importante: ¿qué modelos de representación se están utilizando?, ¿son útiles a otras operaciones?, ¿a cuáles sí, y a cuáles no?...

A poco que se reflexione, sorprende la variedad de enfoques posibles. Explorarlos, inspeccionar todas las posibilidades, optar por una de ellas, determinar el orden de actuación, estudiar las transformaciones más apropiadas, valorar el resultado, etc., convierte al cálculo a secas en cálculo pensado. Es un pequeño desafío, una labor inteligente, divertida, personal.⁶

2.13 Ocasión para el desarrollo de estrategias de pensamiento

Continuando con el ejemplo anterior: ¿son las únicas vías?, ¿cuál es la mejor de todas?, ¿por qué?

Estas cuestiones encierran todo un plan de investigación situacional: análisis de las cantidades involucradas, estrategias posibles de cálculo, análisis de dificultades, ventajas e

⁶ GÓMEZ ALFONSO, B. (1988): Numeración y Cálculo. Ed. Síntesis, Madrid. Pág. 87.

inconvenientes, elección, optimización, decisión, transferencia a situaciones análogas, diseño de patrones o estrategias generalizables...

Poco a poco se va conformando en la mente del alumno un programa completo de estudio de situaciones problemáticas. Que, si bien se circunscribe en principio al campo de lo numérico, pronto puede servir de matriz para esquemas más generales y formativos.

Sowder (1990) señala una serie de características del cálculo mental, que se orientan claramente a la formación en estrategias del pensamiento:

—Empleo de procedimientos constructivos. Ya que la obtención del resultado es el objetivo único, director y selector de estrategias y operaciones.

—Empleo de procedimientos no uniformes; variables y flexibles. basta observar el ejemplo de « $7 + 5$ », para comprender que la diversidad de situaciones es enorme, influidas por variables objetivas -operación aritmética, naturaleza y tamaño de los operandos, finalidad del cálculo- y subjetivas -técnicas conocidas, recursos de memoria, soporte imaginativo, tensión, etc.-, diversificándose, al mismo tiempo, las técnicas aplicables.

—Empleo de procedimientos activos. Con un mayor control del método utilizado en cada situación. Debido, fundamentalmente, a la variedad de situaciones y la consiguiente variabilidad y flexibilidad de estrategias aplicables. Se aleja así el riesgo de rutina y memorización mecánica.

2.14 Desarrollo de la memoria inmediata

Al operar mentalmente se ponen en juego registros de memoria en los que se almacenan datos sencillos -o no tan sencillos- a recuperar en momentos inmediatos posteriores.

Basta un simple ejemplo. Al calcular $42+35$, puedo muy bien marginar momentáneamente el 2 y el 5, en espera de

calcular $40+30$; retengo ahora el 70, y busco en los registros de memoria ocupados: hallo el 2, luego $70+2=72$, busco después: hallo el 5, luego $72+5=77$. (Que nadie piense que el itinerario es único: ni en el soporte ni en la estrategia.)

La limitación natural de la capacidad de memoria incita incluso al diseño de estrategias de cálculo que, a su vez, engendran técnicas para una mejor gestión de los recursos de memoria (otra aportación a las *estrategias de pensamiento*).

Y así, es frecuente que las operaciones se inicien por las unidades de mayor orden, acumulándose resultados sucesivos. Junto con ser una estrategia minimizadora de errores relativos, permite a la memoria verbal mantener buena parte del resultado acumulativo (en español, y en las lenguas latinas en general).

Calculistas famosos -como Jaime García Flores (1989)- llevan al extremo esta interrelación entre memoria y cálculo mental, reduciéndolo prácticamente a la localización y traducción de valores en tablas icónicas o simbólicas puras.

2.15 Ejercitación de la capacidad de concentración

Estrechamente relacionada con el aspecto anterior, un ejercicio mental abstracto favorece el aislamiento de los estímulos externos -en alguna medida, la inhibición sensorial-, el ejercicio operativo de funciones mentales diversas -representación, memoria inmediata, mediata (reglas y automatismos), combinatoria, etc.- y orientar la atención hacia objetos predefinidos. En suma: preparar y ejercitar moderadamente un buen cúmulo de funciones cognitivas, predisponiéndolas para más duras tareas abstractas.

No en vano, los expertos en técnicas de estudio -«transversal», en el sistema educativo español- proponen como «ejercicios de concentración», previos a la sesión de estudio, la realización de cálculos mentales sencillos: adiciones o sustracciones en iteración, permutaciones de cifras y ordenaciones numéricas, sustituciones, etc., que si no son cálculo mental en sentido estricto, mucho se le parecen en las ope-

raciones y procesos elementales: son un modo de precalentamiento para el deporte intelectual.

2.16 Ocasión para el desarrollo de la atención y agilidad mental

En las actividades que se desarrollan de forma organizada, se exige del participante una orientación de la atención y una flexibilidad y prontitud de respuesta, comprobables inmediatamente por el propio sujeto y, en su caso, por los otros participantes, quienes, a su vez, se ven obligados a efectuar interiormente las operaciones y comparar sus resultados con las respuestas ajenas.

Esto, que podría predicarse de cualquier actividad, resalta especialmente en las que tienen como objeto el cálculo mental, por la precisión de las respuestas, la mencionada inmediatez, la sucesión o encadenamiento, la posibilidad de variantes, etc. No se trata simplemente del aprovechamiento y cultivo de la sana competencia: es una llamada permanente a la propia superación, tal como el atletismo reclama el esfuerzo continuado por mejorar los resultados personales, aquí fácilmente comprobables.

Por último, un grupo de consecuencias de la práctica del cálculo mental, teñidas por el tinte de lo discutible -y aún de lo inconfesable- de la apreciación subjetiva. Los técnicos -psicopedagogos-, de una parte, y la experiencia didáctica del profesor y la propia de los alumnos, de otra, las avaloran como resortes educativos útiles, como auténticas motivaciones.

2.17 Ocasión para el ejercicio de la flexibilidad y apertura de mente

Conocida la diversidad de estrategias aplicables para un determinado cálculo, cabe plantearse cuál de ellas es preferible y por qué. Pero esto supone, cuanto menos, la aceptación de esa pluralidad y su validez, previa a la controversia en busca de «la mejor solución»; si es que existe: lo más probable es que la declaración de *mejor estrategia* quede en suspenso, como variedad de opciones personales.

Una sencilla y fructífera situación de enseñanza-aprendizaje para la discusión en grupo con alternativas todas ellas válidas, ocasión para conocer y aceptar aportaciones diferentes de la propia, respetarlas, argumentar convenientemente la postura personal, etc.

2.18 Prestigio social

Tal vez suene presuntuoso afirmar que las matemáticas despiertan admiración. Pero es innegable que la mayoría de la gente se admira -nos admiramos- de quienes efectúan cálculos a velocidades vertiginosas, sin error, y con una seguridad pasmosa, en ocasiones, desafiando a las calculadoras, anticipando resultados o corrigiendo errores de manipulación.

Las matemáticas útiles despiertan admiración e inocente envidia, o no tan inocente: el desprecio que algunos hacen de la matemática -y aun de los matemáticos- parece traducir un género de impotencia, de rechazo a aquello que no se le somete, que le supera. Y los adolescentes -también los niños- son muy sensibles a los estímulos de la consideración social.

2.19 Prestación social

No faltan los errores al calcular mentalmente. Y, por fortuna, al exteriorizarlos, tampoco falta una voz o mano amiga que los corrija.

Arriba me he referido al movimiento de admiración y posible repunte de pequeña envidia o dolor de orgullo herido. Pero es más natural el agradecimiento por el servicio prestado, y más eficaz como motivación la satisfacción cuando se tiene la oportunidad de resolver un problema a alguien. Llámese «prestación o contribución social», «trabajo cooperativo», «práctica del compañerismo» o como se quiera: anhelo de prestar un servicio a los demás, deseo y realidad de ser útil en beneficio de otros; despliegue de potencialidades de la persona en su dimensión social.

2.20 Autosatisfacción

En la misma línea, pero en plano bien diferente, no podemos olvidar la satisfacción que produce el comprobar que toda una legión de entes -los números- se nos están sometidos. Desde el «¡ya sé sumar!» o «¡ya sé dividir!» de un escolar de Primaria, ingenuamente exteriorizado al llegar a casa, hasta el silencioso «¡no hay integral que se me resista!» -más ingenua, por ignorante- de un universitario principiante.

Es una forma del placer intelectual que generan el conocimiento y la práctica de destrezas intelectuales, pero ahora con la posibilidad de ejercitarlas habitualmente, en servicio propio o ajeno. Además, el ámbito de este poder se encuentra casi perfectamente determinado en cada momento: qué operaciones, con qué tipo de números -conjunto, tamaño, etc.-, en qué tiempos, seguridad...

Ésta es sin duda también la motivación en la que hunde sus raíces la satisfacción del «cálculo por el cálculo» -no necesariamente mental- que algunos escolares experimentan, y que alcanza en ocasiones niveles enfermizos.

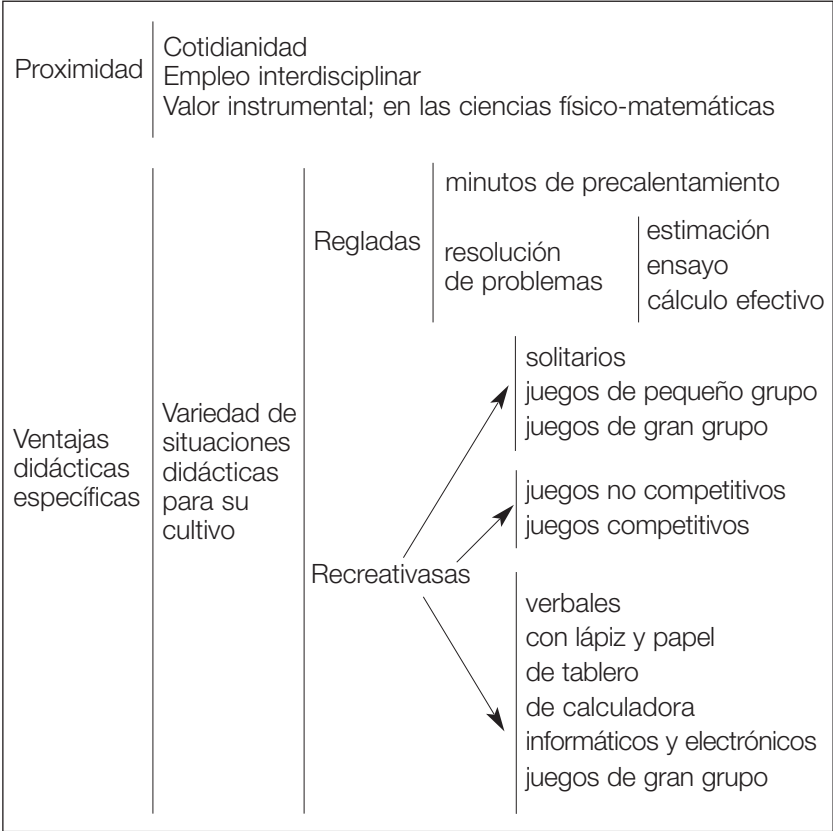
Un extraño fenómeno que los profesores nos tropezamos con frecuencia lo constituye aquellos alumnos que, arrasando toda una historia personal de fracasos y rechazos hacia el estudio en general y la Matemática en particular, se sienten atraídos y motivados hasta la excitación por las actividades en relación con el cálculo mental. «Esto sirve para algo»; «esto es mucho más divertido» -«esto mola», en argot-, «ojalá fuera así todo»... observaciones de alumnos que invitan a considerar que

El cálculo mental es motivante en sí mismo
--

Útil para recabar atención, predisponer al esfuerzo de matematización y, convenientemente graduado, regalo para el caminante fatigado de lo arduo y abstracto.

Recojamos en un panel todos estos argumentos

Del cálculo mental: motivaciones, justificaciones y sugerencias



Ventajas didácticas específicas

Graduabilidad	De las operaciones presentadas	Adición Sustracción Multiplicación División Otras
	Del tipo de cantidades	Sustracción Multiplicación División Otras
Comodidad y rapidez		
Detección de errores en cálculos efectuados por otros medios	Revisión local (cifras extremas Revisión global (tamaño de) cantidades	

Efectos didácticos	Valor de consolación	de los hechos numéricos elementales de las destrezas básicas
	Fundamento de los algoritmos escritos	
	Manifestación y ejercitación de aspectos estructurales	propiedad conmutativa propiedad asociativa (ordinaria) disociatividad (asociativa, en descomposición) propiedad distributiva recurso al simétrico y elemento neutro
	Familiarización con los números, su combinación, sus relaciones	
	Desarrollo de la creatividad e iniciativa personal	
	Desarrollo de estrategias de pensamiento	procedimientos constructivos variedad de estrategias aplicación flexible gestión de los recursos de memoria
	Desarrollo de la memoria inmediata	
	Desarrollo de la capacidad de concentración	
	Desarrollo de la atención y agilidad mental	
	Efectos psicológicos y comportamentales	autosatisfacción utilidad social y servicio incremento del prestigio social flexibilidad y apertura de pensamiento

Todas estas consideraciones motivacionales para el cálculo mental son válidas en toda su amplitud y profundidad para un alumno ciego o deficiente visual. Exceptuando, tal vez, dos puntos: una cierta menor cotidianidad y una limitación en la variedad de situaciones didácticas accesibles.

Las oportunidades que a diario se ofrecen a la persona ciega o deficiente visual para el ejercicio del cálculo mental son distintas en su presentación y exigencia a las del que ve, y, es muy posible que menos frecuentes ya que al faltar

o reducirse la información visual, también se perderán muchas de las situaciones problemáticas, en especial las que se refieran a mensajes visuales de la televisión, carteles, etiquetas o reclamos publicitarios, prensa, revistas, etc. Pero no olvidemos que la comunicación interpersonal es, ante todo, de tipo oral, y que lo normal es que algunas de las informaciones señaladas le sean «traducidas» -leídas, incluso espontánea o semiconscientemente- por un compañero o familiar...

Más grave puede ser la pérdida de posibilidades de ejercitación mediante actividades lúdicas. (Ver Sección 3.4)

Pero una motivación de «utilidad práctica» supera todas ellas: poder prescindir en multitud de situaciones del recurso al instrumental de cálculo, ya sea éste de escritura, dispositivo manual e incluso de la calculadora; precisados de disponibilidad, preparación y expuestos al error por manipulación o pulsación. Las ventajas se perciben de modo inmediato, y lo hacen atractivo y gratificante, sin necesidad de más argumentos.

El cálculo mental facilita decisivamente el trabajo del estudiante ciego, al dispensarle en numerosas situaciones numéricas del recurso a medios instrumentales
--

3. DIFICULTADES DIDÁCTICAS

Pero no todo son laureles. Como en cualquier actividad, y más en las matemáticas, el cálculo mental conlleva dificultades e inconvenientes, sobre todo, de orden didáctico.

3.1 Características del alumno

A) Exige unos niveles mínimos de desarrollo de ciertas aptitudes específicas. En particular: atención, concentración mental y recursos de memoria

Hope¹, desde una óptica de análisis de factores favorecedores del cálculo mental, considera cuatro de ellos: *concentración, hábito, atención e interés*. Entiendo que el «hábito» guarda una estrecha relación con la explotación y aplicación de los «recursos de memoria», en cuanto al interés, se contempla a continuación en forma ampliada.

Contrariamente a lo que pudiera pensarse no precisa, en principio, ni de memorización de hechos numéricos básicos -*tablas*- ni estrategias predefinidas. Su desconocimiento u olvido puede lentificar un cálculo concreto, condicionarlo incluso, pero no impedirlo absolutamente –salvo que provoque bloqueo–.

Sin embargo, la automatización de hechos numéricos elementales e incluso de ciertas estrategias estereotipadas favorece la agilidad y seguridad en los cálculos. De otro modo, obliga al alumno a recurrir a procedimientos extremadamente rudimentarios (recuentos ascendentes o descendentes –véase, páginas atrás, el ejemplo de « $7 + 5$ »–, sumas reiteradas, etc.), propios de estadios iniciales, o al empleo sistemático de imágenes de situaciones físicas o manipulativas (dedos, trazos, materiales estructurados, algoritmos escritos, etc.) que, si bien son acreedores al título de «cálculo pensado», pueden tornarlo lento y trabajoso. Sin olvidar

¹ HOPE, J. A. (1985): "Unraveling the Mysteries of Expert Mental Calculation. Educational Studies in Mathematics", vol. 16 (4), 355-374. Pág. 372.

que el uso de estrategias puede acabar en memorización de resultados, pero la memorización de resultados no sólo no conduce al diseño de estrategias sino que las obstruye (Heege, 1985).

b) Exige un cierto nivel de comprensión de la situación y destrezas aritméticas relacionadas con ella. En tres aspectos

Asimilación de la operación presentada. Que se extiende más allá de la mera interpretación simbólica del signo lingüístico que la representa, ya que condiciona las estrategias aplicables.

Dominio de la estructura numérica y sus representaciones en los diferentes lenguajes; o, más concretamente, en el universo de representaciones interiores del lenguaje operatorio. Tal vez sea esta destreza la que condiciona más fuertemente el dominio numérico –el paso de números naturales a enteros, fraccionarios o decimales– y el rango o tamaño de operandos y resultado –operandos de una, dos o más cifras–. Piénsese, por ejemplo, en el soporte imaginativo de la «escalera» o la «recta numérica» para la adición de enteros, o en la aplicación reiterada de la propiedad distributiva para la multiplicación de números de varias cifras en expresión decimal.

Naturaleza de las cantidades intervinientes; tanto de los operandos como del resultado. Que favorecen la selección de estrategias particulares y estimación del resultado.

c) Fuerte influjo de los intereses personales del alumno y del contexto socio-familiar

Que, si bien pueden ser un estímulo positivo, también pueden actuar negativamente, debilitando no pocos de los valores antes apuntados.

Se incluyen en este grupo el conflicto provocado por el empleo irregular de instrumentos de cálculo tales como calculadora, ábaco, etc., o del mismo cálculo escrito.

Subráyese el calificativo de *irregular*, por inadecuación a la concreta situación aritmética o por la circunstancia de empleo. La actuación pedagógica podría inducir entonces a un enfrentamiento que desorientara al alumno o que provocara su pasividad reactiva (estamos tratando, esencialmente, de los niveles elementales de enseñanza).

Una adecuada intervención didáctica mediante el diseño de actividades y «reglas de juego» debe acabar por anular –devaluar, al menos– estas actitudes «desviadas». Conviene no exagerar la importancia de tales carencias cognitivas, curriculares o actitudinales como decisivas. Más bien son circunstancias personales o contextuales que inciden en un desarrollo del cálculo mental, su aprecio, aprendizaje de técnicas peculiares, eficacia y progreso. Pero son claramente modificables por prácticas y actuaciones didácticas oportunas.

d) Heterogeneidad en los niveles de destreza entre alumnos de un mismo grupo

Al inicio de la escolaridad o en sus primeros años, es poco menos que impredecible el nivel de un «alumno medio». Los conocimientos y destrezas adquiridos extraescolarmente son de origen bien variado: ambiente familiar, contexto cultural, medios de comunicación, curiosidad y oportunidades personales, etc.

Junto con ello, las capacidades específicas de cada alumno para captar, retener y aplicar hechos y técnicas. Mientras a algunos alumnos les basta una observación o comprobación de un determinado hecho numérico, otros precisarán de una veintena de oportunidades. Para unos la conmutatividad es evidente; para otros, exigirá una comprobación reiterada y casi exhaustiva de casos.

La consecuencia didáctica es clara: se dificulta gravemente el diseño y aplicación de actividades grupales. Se corre el riesgo de hacer imposible una participación equilibrada -provechosa, por tanto- de todos ellos: lo que serían simplezas para unos, quedarían inaccesibles o sin posibilidad de éxito para otros. Como de costumbre, los

grupos homogéneos facilitan la intervención didáctica intensiva, que permite una mayor especificidad en las situaciones y objetivos a proponer, adecuados a todos sus miembros.

Subjetivos (del alumno)	Niveles mínimos de desarrollo de aptitudes específicas	atención concentración recursos de memoria
	Nivel de asimilación de los conceptos aritméticos	de la naturaleza de las cantidades intervinientes de la estructura numérica y su representación libre de la naturaleza de la operación presentada
	Actitud específica	del alumno del contexto socio-familiar
Niveles heterogéneos entre alumnos de un mismo grupo	con origen en diferencias individuales	para captar hechos o técnicas para retener hechos o técnicas para aplicar técnicas o recursos específicos de receptividad hacia los estímulos motivacionales
	con origen en los contextos socio-familiares	conocimientos previos de hechos y técnicas práctica en la aplicación de técnicas o recursos específicos

3.2 Evaluación del progreso en cálculo mental

En el cálculo mental pueden distinguirse variedad de aspectos a evaluar:

—Tiempo invertido. Para ser exactos tiempo transcurrido entre la percepción/interpretación del cálculo a realizar (con sus propias dificultades de determinación del instante preciso) y momento de obtención del resultado (que no debe confundirse con el momento de exteriorización -verbal, escrita...- o aparición de indicios exteriorizados). Condicionado el primero por capacidades perceptivas; expresivas, el segundo.

—Estrategia utilizada. Que sólo puede observarse si media verbalización, manipulación o relato inmediato, supuesto que el proceso sea consciente y pormenorizable en todos sus detalles.

—Exactitud o aproximación; según se trate de cálculo o estimación de resultados. Pero, ¿qué baremo adoptar para evaluar errores? ¿importa sólo el resultado o también deben considerarse aspectos procesuales?

—Seguridad. ¿Absoluta o relativa a la confianza general del alumno en sí mismo? ¿No estará ligada a la tensión situacional de repercusión del éxito o fracaso? ¿Debe penalizarse acaso la precaución de verificar el proceso o el resultado difiriendo la respuesta?

Todo ello respecto de dominios o variables predefinidas:

—Dominio de operadores que incluye tanto el campo numérico (naturales, enteros, fracciones, etc.) como el rango en el que se contienen operandos y resultado.

—Operación presentada que no debe confundirse con el método o estrategia operatoria seguida en la resolución. Así, una multiplicación puede tornarla suma el ejecutante, una división, resta, una adición o sustracción, conteo, etc.

—Forma de presentación de la situación a resolver y forma expresiva exigida para la respuesta.

—Carácter de la situación propuesta: simple operación

abstracta, contexto problemático, complejidad de éste, etc.

Sin olvidar las inevitables variables personales:

—Edad.

—Nivel educativo.

—Trayectoria curricular en cálculo mental.

—Capacidad y destreza interpretativa de la forma de presentación de la situación a resolver, ya que a su dificultad calculatoria intrínseca pueden agregarse otras, relacionadas con las capacidades perceptivas y destrezas lectoras del sujeto. De especial importancia en el caso de estudiantes ciegos y deficientes visuales.

No faltan entre personas quasi-analfabetas excelentes calculistas verbales (frecuente en el mundo mercantil), como tampoco faltan quienes, dotados de una gran destreza lectoescritora y capacidad de comprensión abstracta, carecen de estrategias y hábitos calculatorios. Asimismo, por idénticos motivos:

—Forma expresiva exigida para la respuesta.

Recogemos en sendos cuadros esta retahila de inconvenientes:

Aspectos a evaluar en el cálculo mental. Dificultades y condicionantes

Aspecto	Complejidad		Condicionantes
	Tiempo aparente	Percepción/lectura	Defic. perceptivas
		Interpretación	Defic. curriculares
		Exteriorización del resultado	Dific. expresivas
	Tiempo real	Dificultad de determinación	
Resultado	Exacto	Tipo de error	Condicionado a exteriorización del proceso
		Momento procesual	
		Baremación	
	Aproximado	Determinación Grado de aproximación	
Estrategia utilizada	Control	Simultánea	Verbalización
		Descripción	Recuerdo
		A posteriori	Verbalización
	Ausencia de escalas		
Seguridad	Objetiva subjetiva	Determinación de síntomas Control Calibrado Ausencia de escalas	Factores situacionales

Complejidad evaluatoria en el cálculo mental. Variables

Objetivas	De orden matemático	Operación presentada Naturaleza de los operandos Tamaño de los operandos Tamaño del resultado	
	De orden didáctico	Complejidad calculatoria	Operación simple Operación compuesta
		Carácter	Abstracto Contexto problemático
		Forma expresiva	De la presentación Exigencia para el resultado
Subjetivas	Edad del alumno (nivel madurativo)		
	Nivel curricular	Conocimiento de hechos numéricos Conocimiento de técnicas y estrategias	
	Trayectoria curricular en Cálculo Mental	Destrezas previas Práctica acumulada Hábito	

Se deduce de todo ello que:

Deben emplearse metodologías del tipo de la «entrevista clínica» (entiéndase: en sus características, no en sus fines exploratorios de patologías). Lo que implica individualización y prolongado tiempo de aplicación y, si no quieren perturbarse los resultados de la observación, contextos de aula suficientemente *ecológicos*.

Una posible evaluación de eficacia calculatoria es de esperar se vea afectada por las características y dificultades perceptivas y expresivas del sujeto; especialmente, en lo referente a «agilidad», función del «tiempo de respuesta», que incluye tanto la toma de conciencia del cálculo a realizar (fase perceptivo-interpretativa), su realización efectiva (fase calculatoria) y su exteriorización (fase expresiva). Grosso modo, se distinguirían:

Forma de presentación	Respuesta
Oral	Oral
	Escrita
Ícónica (ordenador)	Opción
Escrita	Oral
	Escrita
	Teclado (calculadora)

Cierto que a lo largo del curriculum deberán ejercitarse todas las combinaciones, que podrían y deberían ser evaluadas convenientemente. Pero la evaluación no lo sería del «cálculo mental en sí mismo», sino referido al tipo de situación y respuesta. Y aunque exista una cierta correlación entre resultados evaluatorios, no debe esperarse que sean ni siquiera análogos; sobre todo, si se trata de alumnos con dificultades perceptivas y/o expresivas -nuestro caso-.

Deben establecerse «escalas» o «criterios» de valoración de las variables a evaluar, condicionadas a su vez a las características subjetivas y situacionales. Y ello, sin atentar a la flexibilidad y estrategias personales que tantos elogios merecen.

La evaluación del cálculo mental o pensado no es imposible. Pero poco menos que inviable en las condiciones ordinarias del contexto escolar. Conformémonos con apreciaciones o valoraciones parciales.

3.3 Formación específica del profesor

Este apartado nos remite a consideraciones de «análisis situacional».

En su dimensión matemática es bien concreta:

Hay un número limitado de reglas, estrategias y caminos que facilitan la tarea. Lo que ocurre es que muchos maes-

Formación específica del profesor	Formación matemática	Conocimiento de los fundamentos del contenido a tratar Conocimiento de la proyección del contenido a tratar Conocimiento acerca de estructuras relacionadas, etc.
	Información didáctica	Relativa a metodos Relativa a material Relativa a situaciones de enseñanza-aprendizaje Relativa a estrategias particulares Relativa a instrumentos de evaluación, etc.
	Información sicopedagógica	Relativa a las características generales presumibles en los alumnos Relativa a las necesidades de los alumnos respecto de los contenidos matemáticos a tratar
	Experiencia docente	Relativa al nivel curricular Relativa al tipo general de alumnos Relativa objetivos y cont. previstos Relativa a los materiales disponibles Relativa a las dificultades y facilitadores más frecuentes, etc

Formación específica del profesor	En caso de atender en el aula a algún «alumno con necesidades educativas especiales»	Alumno con dificultades de orden perceptivo y/o psicomotor	Información/formación Afectados por trastornos análogos	
			Confección y adaptación de materiales específicos	Para situaciones de enseñanza-aprendizaje De actividades De evaluación
			Experiencia docente con alumnos afectados por ese deficit	
		Alumno con carencias curriculares	Detección de carencias Conocimiento y diseño de fórmulas de «remediación» Experiencia docente con alumnos afectados por carencias análogas	
		Alumno con trastornos afectivos o de personalidad	Conocimiento de manifestaciones, hipótesis estímulo/respuesta, tratamientos habituales y coyunturales, etc (de tipo general) Experiencia docente con alumnos	

tros y profesores no tienen ellos mismos consciencia de los procesos que aplican cuando calculan mentalmente, y nunca se han parado a analizarlos -sobre un papel- con la finalidad de enseñárselos a sus alumnos².

A tal fin, y aunque pudiera entenderse como exceso en el marco del presente trabajo, se ha intentado recoger en la próxima Sección un abanico -no exhaustivo- de técnicas para el cálculo mental de las cuatro operaciones aritméticas con números enteros.

² GÓMEZ ALFONSO, B. (1988): op. Cit., pág. 69.

No abundan las monografías sobre el tema. Es preciso espigar técnicas y sugerencias incluidas en manuales de cálculo aritmético y su didáctica. No obstante, en los últimos años se viene gestando un movimiento de aproximación al tema (véase, por ejemplo: Gómez, 1988 Op. Cit.; Giménez, 1989).

En particular, hay que destacar el ingente esfuerzo que se está realizando por desarrollar actividades y materiales específicos para la ejercitación como son: dominós, bingos y loterías, juegos de tablero, programas informáticos, etc. Un buen repertorio de estos materiales y juegos puede encontrarse en las obras de Kamii (1986, 1988, 1991, existe versión española).

Como ejemplo de orientaciones didácticas para un desarrollo de técnicas o estrategias de cálculo mental, citaré en esquema las propuestas del Grupo 0 (1997), dirigidas a alumnos entre 6 y 12 años:

- El profesor debe conocer los «procedimientos-tipo» más usuales en cálculo mental.

- Es preciso diseñar una planificación detallada y ajustada a los previsibles avances de los alumnos en la clase.

- Han de anticiparse los puntos delicados, cómo y en qué momento abordarlos y tener previstas cuestiones de procedimiento.

- Los algoritmos mentales se practicarán oralmente, sin ayuda de material.

- Debe realizarse diariamente, en sesiones cortas (no más de 10 minutos), por el considerable esfuerzo y atención que requiere esta actividad. Unas veces dirigida a grupos pequeños de alumnos (6 ó 7), otras a toda la clase.

- Los ejercicios que se propongan deberán estar cuidadosamente dosificados y en orden creciente de dificultad.

—La actitud favorable por parte de los niños se conseguirá con la forma de llevar la actividad, adecuándose a su ritmo.

—El profesor no tiene que decir las técnicas que utiliza, sino que estará atento a las que utilizan los alumnos y a conocer sus dificultades concretas. En consecuencia:

—Que cada alumno exprese cuál es el número que corresponde a la propuesta que se le hace y tenga la oportunidad de explicar cómo lo ha calculado.

—La discusión y el análisis, con todo el grupo, de los procedimientos empleados por los alumnos, es imprescindible para ampliar su catálogo de estrategias de cálculo mental y su conocimiento del significado y propiedades de las operaciones utilizadas, así como para evaluar los logros alcanzados y las dificultades que persisten.

—En otra sesión diferente, que no debería ser consecutiva, se puede trabajar la generalización de una estrategia de cálculo, utilizada en una operación determinada, para operar con números de la misma familia.

—En ningún caso se pedirá a los alumnos que formalicen sus respuestas.

—Realizar una evaluación continua.

3.4 Materiales

En el caso concreto de alumnos ciegos totales o afectados por una deficiencia visual grave, además, existe una limitación no pequeña en el diseño de situaciones adecuadas a este déficit. Se manifiestan, especialmente, en las actividades lúdico-matemáticas:

—Si el soporte es informático, debe adecuarse a una presentación accesible a su limitación visual. Lo que condiciona el equipo preciso, el «entorno» informático, la situación incluso. Así, las presentaciones gráficas, figura-

tivas y muchas bidimensionales serán de todo punto inaccesibles -e inadaptables- al alumno ciego total; en resumen: prácticamente todo el *software* actualmente disponible es inadecuado.

—Si se trata de un juego con tablero, fichas o tarjetas, debe asegurarse la participación en igualdad de condiciones, adaptando el material o fijando normas complementarias, verbalizando cuestiones, resultados o posiciones.

—Si los datos o información de partida se presentan en forma visual (tablero del aula, panel, bandejas, tarjetas, etc.) puede ser suficiente el leerla o suministrarla en braille; esto último implica el prerequisite de que el alumno posea la suficiente destreza lectora para el sistema.

Si intervienen elementos generadores de azar -dados, ruleta, bolas, etc.- debe garantizarse asimismo el uso autónomo de éstos («dados parlantes», fichas o naipes adaptados, etc.)

Las actividades de carácter verbal no sufrirán merma en absoluto (caso bien distinto del que afecta a alumnos sordos o hipoacúsicos; véase: Núñez, J. A., Rosich, N., y Fernández del Campo, J. E. (1996): *Matemática y deficiencia sensorial*. Ed. Síntesis Madrid.

4. TÉCNICAS Y ESTRATEGIAS

Como se adelantaba al comienzo, pueden distinguirse dos formas fundamentales de cálculo mental: el *inmediato* o *automatizado* y el *pensado*. La diferenciación, por extraño que parezca, no es sencilla.

Salvo que aceptemos las teorías asociacionistas en su formulación más radical, el cálculo mental suele apoyarse en representaciones varias: situaciones físicas, manipulativas o gráficas, la propia verbalización, la escritura simbólica imaginada. Es decir: el cálculo se efectúa en el nivel de *representaciones interiores*. Por esta razón, suele designarse como *cálculo pensado*, cuando supone la mediación de un ejercicio mental efectivo sobre imágenes, y que implica toma de decisiones y elección de estrategias.

La elección misma de la forma representativa ya tendría el carácter de una decisión o estrategia: elegir el ámbito de imágenes/símbolos en el que el calculista *se siente más seguro*, o en el que *acumula mayor experiencia de eficacia y éxito*.

En contraposición a este modo de proceder, se hallarían las *respuestas inmediatas*, sin mediar reflexión ni combinatoria representativa. Se ajustarían al esquema estímulo-respuesta del *cálculo mental automatizado* o *inmediato*, y que es típico de la memorización de las *tablas*, aunque no se restringe a los *hechos numéricos básicos* (operaciones con números de una cifra, en escritura decimal): es frecuente en actividades mercantiles memorizar los múltiplos y fracciones de un cierto valor, sin recurrir a cálculo alguno.

Así pues, es preciso admitir relaciones mutuas:

—El cálculo pensado es la vía más segura para la automatización y aplicación eficaz del cálculo aritmético

—El cálculo pensado es un recurso siempre disponible en el cálculo automatizado

—Cálculo automatizado -o inmediato- y cálculo pensado son independientes en sus primeros estadios, pero se potencian y apoyan mutuamente

Ya que, sin la automatización de *hechos numéricos*, el cálculo pensado con cantidades de una cierta dimensión -números de varias cifras, en escritura decimal- se vería reducido a rutinas tan sumamente elementales, que lo lentificarían y harían despreciable.

—El cálculo automatizado es el objetivo; el cálculo pensado, la vía más segura para alcanzarlo.

Hasta el extremo de poder considerar como cálculo automatizado la «aplicación mecánica» -inmediata, por reiteración- de estrategias o «algoritmos» del cálculo pensado.

Los límites del cálculo automatizado vienen perfilados por las necesidades prácticas del alumno; los del cálculo pensado, los decide el propio alumno.

He aquí un intento de descripción de las técnicas y estrategias más frecuentes en el «cálculo pensado». Se toma como esquema general de clasificación las operaciones aritméticas con números naturales, aunque no faltarán las referencias a otros dominios numéricos. Las subdivisiones siguen un supuesto orden de complejidad lógico-operatoria.

4.1 TÉCNICAS Y ESTRATEGIAS PARA LA ADICIÓN

1. Conteos unidad a unidad

No podemos desdeñar técnicas tan elementales como las basadas en el «conteo» o «recuento» en la sucesión numérica, propias de los primeros estadios de aprendizaje. Pero incluso en este nivel tan bajo, se han encontrado procedimientos varios:

1.1 Por recuento total. Propias de adiciones de números

naturales. Se parte de la unidad, superponiendo en sucesión ambas cantidades-operandos:

$$5 + 7 = \{1, 2..., (5 \text{ pasos})..., 5; 6, 7, 8, 9..., (7 \text{ pasos})\} 12$$

1.2 Por recuento parcial. Se elude el recuento para uno de los sumandos. Con dos formas, no universales.

1.2.1 Con origen predeterminado por la presentación. Partiendo de la cantidad enunciada en primer lugar, se prosigue el recuento conforme al segundo sumando:

$$5 + 7 = \{5; 6, 7, 8..., (7 \text{ pasos})\} 12$$

No es exclusiva de los más jóvenes, ni de operandos necesariamente ambos «pequeños»:

$$45 + 7 = \{45; 46, 47..., (7 \text{ pasos})\} 52$$

Incluso en niveles medios o superiores, cuando se trata de la adición de números enteros, siendo negativo el primero de ellos, se encuentran ejemplos de esta forma de proceder:

$$-3 + 5 = \{-3; -2, -1, 0, 1\} 2$$

1.2.2 Con estrategia de elección del origen. Se toma como punto de partida para el recuento el sumando mayor:

$$5 + 7 = \{7; 8, 9, 10..., (5 \text{ pasos})\} 12$$

2. Permuta previa

O aplicación de la propiedad conmutativa. Puede parecer una simpleza; pero todo apunta a señalar que resultan más sencillas -mayor rapidez y frecuencia de éxito- aquellas adiciones en las que el primer sumando supera al segundo; tanto entre números inferiores a la decena -*hechos elementales*-, como entre aquellos otros superiores. La causa que explicaría esta actitud generalizada no está clara.

$$5 + 8 = 8 + 5 = 13$$

En cualquier caso, la aplicación de la técnica conmutativa es general en las adiciones con números superiores a la decena:

$$7 + 56 = 56 + 7 = 63$$

3. Descomposición

Este grupo de técnicas tienen como aspecto común un dominio de la descomposición de una cantidad en otras dos, por vía exclusivamente aditiva o aditivo-sustractiva..

Dado que las descomposiciones posibles son múltiples, supone, a su vez, una capacidad de elección de «la mejor». Elección que no tiene por qué ser universal: responderá a estrategias personales, más o menos desarrolladas o según el nivel de práctica que se haya alcanzado.

3.1 Descomposición aditiva. O mediante adición de partes o cantidades; se entiende: «no unitarias», ya que se reduciría a una estrategia de recuento.

3.1.1 Descomposición de uno de los sumandos en dos partes arbitrarias. Se aplica incluso en casos elementales:

$$6 + 7 = 6 + (4 + 3) = (6 + 4) + 3 = 10 + 3 = 13$$

$$6 + 7 = 6 + (6 + 1) = (6 + 6) + 1 = 12 + 1 = 13$$

(Se ha observado que las sumas del tipo «doble» 2+2, 3+3, 6+6, etc. son aprendidas por los niños con gran rapidez y firmeza.)

Precisamente en los dos ejemplos ofrecidos aparecen las dos descomposiciones más frecuentes -aunque no sean las únicas-,

—la que permite al primer sumando «alcanzar» la decena, y

—la que le hace presente como parte del segundo sumando.

La generalización a casos en uno de cuyos números supera la decena es inmediata:

$$79 + 8 = 79 + (1 + 7) = (79 + 1) + 7 = 80 + 7 = 87$$

Obsérvese cómo la estructura numérica decimal empieza a cobrar importancia. Lo que sugiere que no pocas estrategias del «cálculo pensado» -las que aquí se describen y se emplean más a menudo por niños y adultos- tal vez estén ligadas a dos soportes fundamentales:

—Soporte verbal. Ya que la mayoría de las nomenclaturas verbales de las cantidades responden a la estructura decimal: «diec-i-séis», «veint-i-cuatro», «ciento - cuarenta y dos», etc.

—Soporte de escritura simbólica imaginada; con preponderancia en nuestra cultura de la escritura decimal.

La escritura/verbalización de cantidades en forma decimal -polinómica o posicional- abre un campo casi ilimitado de estrategias.

3.1.2 Por órdenes de unidades. Su referente común es la descomposición decimal, su campo de aplicación, las sumas cuyos sumandos -uno, al menos- superan la decena. En cualquier caso exigen (estructuralmente) la aplicación reiterada de las propiedades asociativa y conmutativa de la adición.

3.1.2.1 Procediendo por órdenes descendentes. Es, sin duda, la técnica más fecunda en la adición de números de un cierto tamaño mediante cálculo pensado. Además como en el proceso de cálculo se van obteniendo resultados cada vez más próximos al objetivo final, la convierte en *técnica de cálculo aproximado*.

En español, se corresponde con la lectura verbal de las cantidades. Por tanto, supone un ahorro -mejor gestión de recursos de memoria-. Pero los *espacios de memoria de trabajo* o *memoria inmediata* deben contener *elementos indivisibles*, es decir, *términos*. De otro modo -si se acude a la representación simbólica- el esfuerzo de memoria se complica.

$$38 + 9 = (30 + 8) + 9 = 30 + (8 + 9) = 30 + 17 = 30 + (10 + 7) = (30 + 10) + 7 = 40 + 7 = 47$$

$$46 + 25 = (40 + 6) + (20 + 5) = (40 + 20) + (6 + 5) = 60 + (6 + 5) = 60 + 11 = 60 + (10 + 1) = (60 + 10) + 1 = 70 + 1 = 71$$

$$134 + 29 = (100 + 30 + 4) + (20 + 9) = 100 + (30 + 20) + (4 + 9) = 100 + 50 + (4 + 9) = 100 + 50 + 13 = 100 + 50 + 13 = 100 + 50 + (10 + 3) = 100 + (50 + 10) + 3 = 100 + 60 + 3 = 100 + 63 = 163$$

$$317 + 468 = (300+17) + (400+68) = 300+400 + (17+68) = 700 + (10+7 + 60+8) = 700 + (10+60) + 7+8 = 700 + 70 + 15 = 770 + (10+5) = (770+10) + 5 = 780 + 5 = 785$$

3.1.2.2 Procediendo por órdenes ascendentes. En realidad, es una versión verbalizada del algoritmo usual, ahora sin lápiz ni papel, muy posiblemente con recurso a la imagen escrita de aquél.

Compíte en frecuencia con el anterior para la adición de números superiores a la decena, coincidiendo en apariencia, si uno de ellos es menor. Pero tanto los recursos de memoria como el esfuerzo de atención son muy superiores aquí. Parece estar ligado a estilos de gestión de recursos por modalidad visual, más que auditiva o verbal. (Con el orden en los términos se pretende subrayar el foco atencional:)

$$38 + 9 = (8 + 30) + 9 = (8 + 9) + 30 = 17 + 30 = (7 + 10) + 30 = 7 + (10 + 30) = 7 + 40 = 47$$

$$46 + 25 = (6 + 40) + (5 + 20) = (6 + 5) + (40 + 20) = 11 + (40 + 20) = 11 + 60 = (1 + 10) + 60 = 1 + (10 + 60) = 1 + 70 = 71$$

$$134 + 29 = (4 + 130) + (9 + 20) = (4 + 9) + 130 + 20 = 13 + 130 + 20 = 13 + (30 + 100) + 20 = 3 + 10 + (30 + 100) + 20 = 3 + (10 + 30) + 100 + 20 = 3 + 40 + 20 + 100 = 3 + (40 + 20) + 100 = 3 + 60 + 100 = 163$$

$$\begin{aligned}
 317 + 468 &= (7+310) + (8+460) = (7+8) + (310+460) = 15 \\
 &+ (10+300 + 60+400) = 15 + (10+60) + (300+400) = 15 \\
 &+ 70 + (300+400) = 5 + 10 + 70 + (300+400) = 85 + \\
 &(300+400) = 85 + 700 = 785
 \end{aligned}$$

3.1.2.3 Procediendo sin secuencia estricta de órdenes de unidades. Parece apoyarse en recursos de memoria verbal de muy escasa aplicación en el área cultural española o hispano-parlante.

$$\begin{aligned}
 46 + 25 &= (40 + 6) + (5 + 20) = 40 + (6 + 5) + 20 = 40 + \\
 11 + 20 &= 40 + (11 + 20) = 40 + (1 + 10) + 20 = 40 + 1 \\
 &+ (10 + 20) = 40 + 1 + 30 = (40 + 30) + 1 = 70 + 1 = 71
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 134 + 29 &= (4 + 130) + (9 + 20) = (4 + 9) + 130 + 20 = \\
 13 + 130 + 20 &= 13 + (30 + 100) + 20 = (13 + 30) + 100 \\
 + 20 &= (10 + 3 + 30) + 100 + 20 = 3 + (10 + 30) + 100 \\
 + 20 &= 3 + 40 + 100 + 20 = 143 + 20 = (140 + 3) + 20 \\
 &= (140 + 20) + 3 = 160 + 3 = 163
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 317 + 468 &= (300+17) + (400+68) = 300+400 + (17+68) \\
 &= 700 + (10+7) + (60+8) = 700 + (10+60) + (7+8) = 700 \\
 &+ (10+60) + 15 = 700 + (10+60) + (10+5) = 700 + \\
 &(10+60+10) + 5 = 700 + 80 + 5 = 785
 \end{aligned}$$

3.1.3 Descomposiciones para la aparición reiterada de un sumando arbitrario. En algunos ambientes mercantiles es usual el cálculo de cantidades como múltiplos de otra bien determinada, la docena, por ejemplo. Se tiende entonces a descomponer los números en sumas reiteradas de dicha cantidad-base y sus restos.

Puede considerarse como generalización de la «suma por duplicación de un sumando», que se contemplaba en 3.1.1.2. Asimismo, tiene un cierto sabor de cálculo en base no decimal.

$$\begin{aligned}
 38 + 27 &= (12+12+12+2) + (12+12+3) = (12+12+ \\
 12+12+12) &+ (2+3) = 60 + (2+3) = 60 + 5 = 65
 \end{aligned}$$

3.2 Descomposiciones aditivo-sustractivas

Uno de los sumandos se descompone como sustracción.

Por lo general, aparecen como minuendo decenas completas, facilitándose así la adición. Es muy frecuente con sumandos que cuentan con 8 ó 9 unidades:

Tiene un amplio campo de aplicación: desde los *hechos numéricos elementales* hasta cantidades importantes. Antes que cálculo por sustracción efectiva, parece proceder por «recuento descendente» (ver más adelante), pues el sujeto calculista no parece servirse en ningún caso del algoritmo escrito imaginado.

$$4 + 9 = 4 + (10 - 1) = (4 + 10) - 1 = 14 - 1 = 13$$

$$73 + 9 = 73 + (10 - 1) = (73 + 10) - 1 = 83 - 1 = 82$$

$$73 + 28 = 73 + (30 - 2) = (73 + 30) - 2 = 103 - 2 = 101$$

$$282 + 89 = 282 + (90 - 1) = 282 + (100 - 10 - 1) = (282 + 100) - 10 - 1 = 382 - 10 - 1 = 372 - 1 = 371$$

4. Mediante representación interior

La observación y control externos del proceso calculatorio, como se indicó páginas atrás, no son sencillos ni definitivos. Tres son las fuentes principales:

—Observación ecológica de acciones en el sujeto-calculista. Por la que pueden detectarse recuentos de dedos, movimientos de labios e incluso verbalizaciones espontáneas.

—Verbalización solicitada. Por la que el sujeto-calculista describe en voz alta las operaciones que realiza.

—Relato «a posteriori». Análogo al anterior, pero una vez obtenido el resultado, como descripción introspectiva.

Se han obtenido así tres grupos de representaciones; por orden de frecuencia:

a) Representación simbólica gráfica o de algoritmos escritos (no necesariamente el *canónico*).

- b) Representación de acciones sobre material manipulativo. Por lo general, aquél que le resulta más familiar: regletas de Gategno, bloques multibase, ábacos, etc.
- c) Representación de situaciones gráficas. Sean puntos, trazos, etc.

Como fórmula mixta, se encuentra la representación de la «tira numérica» o sucesión de números en forma simbólica ordenados espacialmente. Debiera esperarse que dicha ordenación tomara una configuración de línea recta; pero ésta sólo aparece en niveles muy elementales. Pronto -quizás al superarse la veintena- se desplaza en zig-zag, espiral, tabla bidimensional; tal vez en función de la experiencia manipulativa o representativa: cinta métrica, calendario, paneles, etc.

En sentido estricto, esta forma de proceder por vía imaginativa no debería merecer el título de «cálculo pensado», ya que el esfuerzo de acción propiamente numérica y aplicación de estrategias es casi inexistente. Sin embargo, es difícil asegurar que no se aplica alguna de estas características en un paso determinado, o si la misma elección de representaciones no es ya una estrategia adecuada a las posibilidades y hábitos del sujeto-calculista.

Estrategias o técnicas para el cálculo pensado de adiciones

Conteos	Por recuento total		
	Por recuento parcial	Con origen predeterminado por presentación	
		Con estrategia de elección del origen	
Premuta previa (aplicación de la propiedad conmutativa)			
Descomposición	Descomposición aditiva (mediante adición de partes)	De uno de los sumandos en dos partes arbitrarias	Alcance de la decena inmediata
			Generación de dobles
		En órdenes de unidades	Descendentes
			Ascendentes
			Sin secuencia estricta
		Para la aparición reiterada de un sumando arbitrario	
	Descomposiciones aditivo-sustractivas		
Mediante representación interior	Simbólica gráfica (de algoritmos escritos)		
	De acciones sobre material manipulativo		
	De situaciones gráficas		

4.2 TÉCNICAS PARA LA SUSTRACCIÓN

En razón de la estructura algebraica aditiva de grupo, y según las teorías psicopedagógicas, la sustracción es inseparable de la adición, por más que el algoritmo escrito las haya alejado formalmente. Es, pues, de esperar que sean paralelas o análogas las estrategias empleadas en una y otra por el cálculo pensado.

1 Recuentos

O conteos, mediante operación unidad a unidad.

1.1 Recuento ascendente o de conversión aditiva. Partiendo de la cantidad sustraendo, se asciende por recuento hasta el minuendo:

$$12 - 7 = \{7; 8, 9, 10..., (5 \text{ pasos})\} 12$$

$$92 - 87 = \{87; 88, 89..., (5 \text{ pasos})\} 92$$

1.2 Descendente. Ciertamente, es menos frecuente que la primera, y mucho más difícil: lenta, con tropiezos y errores, inseguridad manifiesta, etc. Pero es que el enunciado descendente de la serie numérica también lo es. Y es cierto asimismo que apenas se ejercita en el aula. No obstante, es muy utilizada para cantidades grandes.

Obsérvese que en estas técnicas sustractivas el resultado no se verbaliza con la serie numérica: es fruto de un recuento ajeno a dicha serie, que puede ayudarse de refuerzos físicos -dedos, golpes, representaciones interiores-.

$$12 - 7 = \{12; 11, 10..., (5 \text{ pasos})\} 7$$

$$92 - 87 = \{92; 91, 90..., (5 \text{ pasos})\} 87$$

2. Permuta previa

O reducción al contrario. Se ha observado que la adición de enteros de distinto signo se reduce, normalmente, a «sus-

tracción de naturales», identificada a la «sustracción de enteros positivos». Se sigue entonces uno de los procesos siguientes:

A) Primer sumando positivo y segundo negativo. Con dos situaciones:

a) Primer sumando mayor que el valor absoluto del segundo. Equivale a una resta posible y ordinaria entre naturales:¹

$$+7 + -5 = 7 - 5 = 2 = +2$$

b) Primer sumando menor que el valor absoluto del segundo. Equivale a una sustracción imposible entre naturales. La operación se facilita mediante un *doble paso a los contrarios*: *el contrario de la suma de contrarios*; que devuelve, operatoriamente, a la situación anterior:

$$+5 + -7 = -(7 + -5) = -(+7 + -5) = -(7 - 5) = -(2) = -2$$

B) Primer sumando negativo y segundo positivo. Asimismo, con dos situaciones:

c) Valor absoluto del primero menor que el del segundo. La permuta en la suma lleva, de nuevo a la situación a) de resta posible y ordinaria entre naturales:

$$-5 + +7 = +7 + -5 = 7 - 5 = 2 = +2$$

d) Valor absoluto del primero mayor que el del segundo. La permuta de la suma conduce a la situación b), que sería reducida a la a):

$$-7 + +5 = -(+7 + -5) = -(7 - 5) = -(2) = -2$$

Aunque las operaciones entre números enteros o «con signo» suelen ser más propias de niveles posteriores a los de

¹ Los números enteros van afectados del correspondiente signo, que indica si es positivo o negativo.

simple iniciación aritmética, se han incluido aquí para completar este cuadro de estrategias, al menos hasta el dominio de números enteros, tanto positivos como negativos.

Obsérvese el cambio alternativo entre dominios numéricos:

- contemplación de la suma de números enteros de distinto signo como resta de naturales,
- operación de resta entre naturales,
- retorno al dominio de números enteros.

Las estrategias aditivas para dos números enteros «de igual signo» son idénticas a las empleadas para naturales. Si ambos son positivos, por la coincidencia estructural. Si negativos, mediante el paso a los contrarios, como en b).

3. Operaciones sobre partes o cantidades no unitarias

3.1 Descomposición. Consistente en descomponer aditivamente el sustraendo en partes -por supuesto, no unidades simples, que lo reduciría al tipo «recuentos»-. En alguna medida, también puede implicar la descomposición aditiva del minuendo.

Solapadamente, su fundamento estructural es la propiedad de que «el contrario de una suma es la suma de contrarios»:

$$-(a + b + c) = -a + -b + -c$$

tal como se ha visto en la estrategia de *permuta previa*. Pero, mientras que allí se orientaba al objetivo de operaciones entre números enteros, aquí pretende resolver la sustracción entre naturales, según el esquema clásico de las «cuatro operaciones».

De esta forma, una sustracción (posible) se transforma en una serie de dos o más sustracciones de minuendos más

sencillos. Según sea esta descomposición se observan diferentes tipos:

3.1.1 Descomposición por órdenes de unidades. El sustraendo se contempla en su forma polinómica, como suma de unidades, decenas, centenas, etc. Las restas sucesivas se reducen a operaciones entre unidades del mismo orden, con reserva en memoria de los resultados parciales (acumulados o no); lo que supone, a su vez, la descomposición polinómica del minuendo.

3.1.1.1 Órdenes descendentes. Como en el caso de la adición, es sin duda la de más segura aplicación. La razón es bien simple (al menos, en las lenguas latinas): el soporte verbal; que permite prácticamente ir verbalizando el resultado -aunque sea preciso rectificarlo, si las unidades del sustraendo en el correspondiente orden superan a las del minuendo-, con el consiguiente refuerzo y fijación en memoria del resultado parcial. La estrategia en orden ascendente, en cambio, se ve sustituida por el soporte de representación gráfico-simbólica del algoritmo tradicional.

Si el sustraendo es elemental (inferior a la decena), se obtiene un hecho básico de la sustracción pero que, en el fondo, corresponde a esta estrategia:

$$\begin{aligned} 43 - 7 &= (40 + 3) - 7 = 40 + 3 - 7 = 40 + (3 - 7) \dots = (30 + 10) + 3 - 7 = 30 + 10 + 3 - 7 = 30 + (10 + 3) - 7 = 30 + 13 - 7 = 30 + (13 - 7) = 30 + 6 = 36 \end{aligned}$$

El caso general se refiere a cantidades que superan la decena:

$$\begin{aligned} 57 - 25 &= 57 - (20 + 5) = 57 - 20 - 5 = (57 - 20) - 5 = (50 + 7 - 20) - 5 = (50 - 20) + 7 - 5 = 30 + 7 - 5 = 37 - 5 = (30 + 7) - 5 = 30 + (7 - 5) = 30 + 2 = 32 \end{aligned}$$

Aunque es muy frecuente la doble descomposición -que tal vez subyace inconscientemente en los pasos intermedios del ejemplo- seguida de una reordenación en restas parciales entre unidades de igual orden:

$$57 - 25 = (50 + 7) - (20 + 5) = 50 + 7 - 20 - 5 = (50 - 20) + (7 - 5) = 30 + 2 = 32$$

Cuando una de las restas parciales es imposible, se reforma la expresión del resultado acumulado, dando lugar a otra *no canónica*:

$$55 - 27 = (50 + 5) - (20 + 7) = 50 + 5 - 20 - 7 = (50 - 20) + (5 - 7) = 30 + (5 - 7) = 30 + 5 - 7 = (20 + 10) + 5 - 7 = 20 + (10 + 5) - 7 = 20 + 15 - 7 = 20 + 8 = 28$$

3.1.1.2 Ordenes ascendentes. Descompuestos uno o ambos términos, se procede como en el caso anterior, pero respetando el orden inverso de unidades. La imposibilidad de sustracción natural en uno de los resultados parciales, conduce a una situación en todo semejante al algoritmo escrito:²

$$57 - 25 = (7 + 50) - (5 + 20) = 7 + 50 - 5 - 20 = (7 - 5) + (50 - 20) = 2 + (50 - 20) = 2 + 30 = 32$$

$$55 - 27 = (5 + 50) - (7 + 20) = 5 + 50 - 7 - 20 = (5 - 7) + (50 - 20) = -2 + 30 = 28$$

3.1.2 Descomposición en partes arbitrarias. Suelen producirse respecto de una cantidad o «base» determinada, ligada sin duda a la práctica cotidiana: decenas, docenas, grupos de 6 unidades (medias docenas) o de siete unidades (semanas), etc.

En este caso, el sustraendo mengua a medida que se resta la «base» del minuendo; sin embargo, no parece producirse una mengua paralela en el sustraendo, sino que aparece una «cuenta auxiliar» que aumenta hasta alcanzarle por defecto:

$$55 - 27 = 55 - 12 + 12 - 27 = (55 - 12) + 12 - 27 = 43 + 12 - 27 = 43 - 12 + 12 + 12 - 27 = (43 - 12) + 24 - 27 = 31 + 24 - 27 = 31 - (27 - 24) = 31 - 3 = 28$$

² Como en páginas anteriores el orden de los términos subraya la aplicación del *foco atencional*.

El fundamento algorítmico es la colección de múltiplos de la «base» (12, en este caso), con una doble operación de descenso para el minuendo {55, 43, 31} y de ascenso hacia el sustraendo {12, 24}. Por último, se procede a la resta con la diferencia de ascenso {31 - (27 - 24)}.

En otras ocasiones, se reduce simultáneamente la misma cantidad en minuendo y sustraendo, buscando expresiones sencillas («con 0»):

$$55 - 27 = (55 - 5) - (27 - 5) = 50 - 22 = 50 - (20 + 2) = 50 - 20 - 2 = (50 - 20) - 2 = 30 - 2 = 28$$

o, bien:

$$55 - 27 = (50 + 5) - (22 + 5) = 50 - 22 = 50 - (20 + 2) = 50 - 2 - 20 = (50 - 2) - 20 = 48 - 20 = 28$$

3.2 Estrategias sustractivo-aditivas. El algoritmo mental más eficiente consiste en sustituir el sustraendo por la diferencia entre su redondeo y lo que le falta para éste; aplicando el *principio del contrario*, la resta original se convierte en una suma algebraica alternativa:

No es exclusiva de «grandes números»; es frecuente su aparición para calcular los *hechos sustractivos básicos*:

$$17 - 9 = 17 - (10 - 1) = 17 - 10 + 1 = (17 - 10) + 1 = 7 + 1 = 8$$

$$55 - 27 = 55 - (30 - 3) = 55 - 30 + 3 = (55 - 30) + 3 = 25 + 3 = 28$$

Las estrategias sustractivas de representación interior tienen los mismos fundamentos y formas que para la adición.

Estrategias o técnicas para el cálculo pensado de sustracciones

Conteos	Ascendentes (de conversión aditiva)		
	Descendente		
Premuta previa (reducción al contrario)			
Operaciones sobre partes o cantidades no unitarias	Descomposición	Por órdenes de unidades	Descendente
			Ascendente
		En partes arbitrarias	
	Estrategias sustractivo-aditivas		
Mediante representación interior	Simbólica gráfica (de algoritmos escritos)		
	De acciones sobre material manipulativo		
	De situaciones gráficas		

4.3 TÉCNICAS Y ESTRATEGIAS PARA LA MULTIPLICACIÓN

1. Permuta previa

O aplicación de la propiedad conmutativa. En general -incluso para los *hechos numéricos básicos*- parecen más sencillas las multiplicaciones cuyo primer factor (multiplicando) es mayor que el segundo (multiplicador), como si «redujera el itinerario de búsqueda en una tabla». La respuesta a esta situación tal vez se halle en la aplicación de otras técnicas, respecto de las cuales la permuta de operandos sea tan sólo una fase preparatoria.

$$3 \times 7 = 7 \times 3 = 7 + 7 + 7 = \{7, 14\} \text{ 21}$$
$$6 \times 8 = 8 \times 6 = 8 \times (5 + 1) = (8 \times 5) + 8 = 40 + 8 = 48$$
$$4 \times 9 = 9 \times 4 = 9 \times (2 \times 2) = (9 \times 2) \times 2 = 18 \times 2 = 18 + 18 = 36$$

2. Reducción aditiva

Entendiendo por tales estrategias que reducen las multiplicaciones a puras sumas de factores iguales:

Recuerdan, por una parte, el conteo aditivo unidad a unidad, tomando aquí como «unidad» la «base» del primer

factor. Por otra, recuerda la cantilena tradicional: «ocho: por una, es ocho; ocho: por dos, dieciséis; ocho: por tres...», con su apoyatura rítmico-musical. (¿Quién podría no asegurar que, una vez comprendida la «tabla», no se torna argucia para disimular las sumas paralelas?)

$$8 \times 4 = 8 + 8 + 8 + 8 = \{8; 16, 24... (4 \text{ pasos})\} 32$$

3. Estrategias de distribución

Basadas en la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición, recurren a la descomposición aditiva o sustractiva de uno o ambos factores, reduciendo la operación global a sumas/sustracciones de productos más simples, análogos a los *hechos multiplicativos básicos* de factores inferiores a la decena.

3.1 Estrategias multiplicativo-aditivas

3.1.1 Descomposición según órdenes de unidades

3.1.1.1 Según órdenes descendentes. Tal vez sea la forma más habitual de multiplicación mental.

Sin otro esfuerzo que velar por la permanencia de resultados o valores de descomposición en *registros de memoria*, se generaliza a factores de tres cifras decimales.

La doble descomposición, permite abordar productos cuyos dos factores tengan varias cifras en base 10.

(Obsérvese la aplicación sistemática de las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación y adición, así como la adición por descomposición.)

$$\begin{aligned} 48 \times 6 &= (40 + 8) \times 6 = (40 \times 6) + (8 \times 6) = (4 \times 10 \times 6) + \\ &+ (8 \times 6) = (4 \times 6 \times 10) + (8 \times 6) = ((4 \times 6) \times 10) + (8 \times 6) = \\ &+ (24 \times 10) + (8 \times 6) = 240 + (8 \times 6) = 240 + 48 = 240 + 40 \\ &+ 8 = 280 + 8 = 288 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8 \times 621 &= 8 \times (600 + 21) = (8 \times 600) + (8 \times 21) = (8 \times 6 \times 100) + (8 \times 21) = (48 \times 100) + (8 \times 21) = 4800 + (8 \times 21) = \\
 &= 4800 + (8 \times (20 + 1)) = 4800 + (8 \times 20) + (8 \times 1) = 4800 + \\
 &+ (8 \times 2 \times 10) + (8 \times 1) = 4800 + (16 \times 10) + (8 \times 1) = 4800 \\
 &+ 160 + (8 \times 1) = 4800 + 100 + 60 + (8 \times 1) = 4900 + 60 \\
 &+ (8 \times 1) = 4960 + (8 \times 1) = 4960 + 8 = 4968
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 36 \times 54 &= (30 + 6) \times 54 = (30 \times 54) + (6 \times 54) = (3 \times 10 \times 54) + (6 \times 54) = (3 \times 54 \times 10) + (6 \times 54) = (3 \times (50 + 4) \times 10) + (6 \times 54) = \\
 &= ((3 \times 50) + (3 \times 4) \times 10) + (6 \times 54) = ((150 + 12) \times 10) + (6 \times 54) = (162 \times 10) + (6 \times 54) = 1620 \\
 &+ (6 \times 54) = 1620 + (6 \times (50 + 4)) = 1620 + (6 \times 50) + (6 \times 4) = 1620 + 300 + (6 \times 4) = 1920 + (6 \times 4) = 1920 + \\
 &24 = 1944
 \end{aligned}$$

3.1.1.2 Según órdenes ascendentes. En todo análoga a la anterior, pero iniciando los productos por las unidades de menor orden en el factor descompuesto:

$$\begin{aligned}
 48 \times 6 &= (40 + 8) \times 6 = (8 + 40) \times 6 = (8 \times 6) + (40 \times 6) = \\
 &= 48 + (40 \times 6) = 48 + (4 \times 10 \times 6) = 48 + (4 \times 6 \times 10) = 48 \\
 &+ (24 \times 10) = 48 + 240 = 240 + 48 = 240 + 40 + 8 = 280 \\
 &+ 8 = 288
 \end{aligned}$$

Aunque suele ser más frecuente la permuta previa:

$$\begin{aligned}
 48 \times 6 &= 6 \times 48 = 6 \times (8 + 40) = (6 \times 8) + (6 \times 40) = 48 + \\
 &+ (6 \times 40) = 48 + (6 \times 4 \times 10) = 48 + (24 \times 10) = 48 + 240 \\
 &= 48 + 40 + 200 = 88 + 200 = 288
 \end{aligned}$$

3.1.2 Otras descomposiciones aditivas. La descomposición aditiva de un número no tiene por qué seguir necesariamente la forma polinómica decimal, correspondiente a nuestro sistema de escritura numérica. Razones culturales o socio-profesionales (contextuales, quizás, para el alumno) pueden hacer muy familiares otras descomposiciones aditivas con base distinta de 10. Es el caso del «12», por la persistencia en el empleo de la *docena*:

Un uso muy extendido es el del «5», que presenta además la ventaja de dar productos sin unidades del correspondiente orden al multiplicar por números pares (terminan en «0»).

La multiplicación sistemática por «2» tiene orígenes anti-quísimos. Al poder descomponerse cualquier número en suma de potencias de «2», basta doblar sucesivamente el otro factor y sumar los productos convenientes -incluido el propio factor, si el número descompuesto es impar-. En la práctica, se va doblando el factor no descompuesto, a la par que se va reduciendo el descompuesto en función de la potencia sustraída, es decir, la descomposición tendría carácter descendente.

Estas técnicas implican un dominio *sui generis* de productos particulares. Excepción hecha de la descomposición por el «5», parecen no tener predicamento didáctico, salvo que -como se ha indicado- lo aconsejen razones contextuales.

$$27 \times 4 = (12 + 12 + 3) \times 4 = (12 \times 4) + (12 \times 4) + (3 \times 4) = 48 + 48 + (3 \times 4) = 96 + (3 \times 4) = 96 + 12 = 108$$

$$8 \times 17 = 8 \times (5 + 5 + 5 + 2) = (8 \times 5) + (8 \times 5) + (8 \times 5) + (8 \times 2) = 40 + 40 + 40 + (8 \times 2) = 120 + (8 \times 2) = 120 + 16 = 120 + 10 + 6 = 130 + 6 = 136$$

$$9 \times 17 = 9 \times ((2 \times 8) + 1) = ((9 \times 2) \times 8) + (9 \times 1) = (18 \times 8) + 9 = (18 \times (2 \times 4)) + 9 = ((18 \times 2) \times 4) + 9 = (36 \times 4) + 9 = (36 \times (2 \times 2)) + 9 = ((36 \times 2) \times 2) + 9 = (72 \times 2) + 9 = 144 + 9 = 153$$

O bien:

$$9 \times 17 = ((2 \times 4) + 1) \times 17 = ((2 \times 4) \times 17) + (1 \times 17) = (17 \times (2 \times 4)) + 17 = ((17 \times 2) \times 4) + 17 = (34 \times 4) + 17 = (34 \times (2 \times 2)) + 17 = ((34 \times 2) \times 2) + 17 = (68 \times 2) + 17 = 136 + 17 = 136 + 10 + 7 = 146 + 7 = 153$$

3.2 Estrategias multiplicativo-sustractivas. En las que uno -o ambos- de los factores se descompone según una diferencia. Aparece la distributividad de la multiplicación respecto de la resta; o, si se prefiere, en el dominio de los números enteros: «el producto de un número por el contrario de otro es igual al contrario del producto de dichos números».

Es muy frecuente que esta descomposición responda al «redondeo» a decenas, centenas, etc., provocadora de la aminoración inmediata del factor sustituido:

$$14 \times 9 = 14 \times (10 - 1) = (14 \times 10) - (14 \times 1) = 140 - 14 = 140 - 10 - 4 = 130 - 4 = 126$$

$$4 \times 189 = 4 \times (190 - 1) = (4 \times 190) - (4 \times 1) = (4 \times 19 \times 10) - (4 \times 1) = ((4 \times (20 - 1)) \times 10) - (4 \times 1) = ((4 \times 20) - (4 - 1)) \times 10 - (4 \times 1) = ((80 - 4) \times 10) - (4 \times 1) = (76 \times 10) - (4 \times 1) = 760 - 4 = 756$$

4. Estrategias basadas en la factorización de alguno de los términos

Bajo el prisma estructural, resultarían paralelas a las estrategias de descomposición para la adición o sustracción. Entonces, la descomposición se efectuaba en sumandos, ahora, en factores convenientes a los usos del sujeto-calculista. Tal como allí aparecían sumas/restas, aquí pueden involucrarse multiplicaciones/divisiones; deberían, en alguna forma, considerarse en el apartado siguiente, pero se está siguiendo una clasificación por objetivos, no según itinerarios.

Toda factorización implica una división: una búsqueda de factores exactos. Los cocientes obtenidos -partes alícuotas- dan nombre al procedimiento.

4.1 Factorización sobre el «10». El caso más simple y de aplicación general es la multiplicación en que uno de los factores es múltiplo de la decena.

Basta multiplicar el «número de decenas» por el otro factor, y «añadir un cero» -multiplicar por 10 el resultado- operación esta última que habitualmente se realiza «visualizando» la situación gráfico-simbólica: «añadir un cero» o dos, si se trata de multiplicación por un número entero de centenas.

$$40 \times 7 = (4 \times 10) \times 7 = 4 \times (10 \times 7) = 4 \times (7 \times 10) = (4 \times 7) \times 10 = 28 \times 10 = 280$$

4.2 Factorización general. Consistente en descomponer uno o ambos factores en otros más simples, no necesariamente primos. Su fundamento estructural es la propiedad asociativa de la multiplicación; ocasionalmente, se acude a la propiedad conmutativa.

$$60 \times 90 = (6 \times 10) \times (9 \times 10) = (6 \times 9) \times (10 \times 10) = 54 \times 100 = 5400$$

$$15 \times 36 = 15 \times (4 \times 9) = (15 \times 4) \times 9 = 60 \times 9 = 540$$

4.3 Factorización por partes alícuotas. O «multiplicación-división». Un caso muy particular y útil es aquél en que uno de sus factores es múltiplo de «5» y el otro de «2», o bien: uno de ellos de 25, y el otro de 4; etc.

$$35 \times 8 = (7 \times 5) \times (2 \times 4) = 7 \times (5 \times 2) \times 4 = 7 \times 10 \times 4 = (7 \times 4) \times 10 = 28 \times 10 = 280$$

$$75 \times 8 = (3 \times 25) \times (4 \times 2) = 3 \times (25 \times 4) \times 2 = 3 \times 100 \times 2 = (3 \times 2) \times 100 = 6 \times 100 = 600$$

$$35 \times 56 = (7 \times 5) \times (8 \times 7) = (5 \times 8) \times (7 \times 7) = 40 \times 49 = 40 \times (50 - 1) = (40 \times 50) - (40 \times 1) = (20 \times 100) - 40 = 2000 - 40 = 1960$$

4.4 «Mitad y doble». Es un caso particular de descomposición aditiva en base «2». La obtención mental de dobles y mitades parece ser muy ágil y segura:

$$27 \times 16 = 27 \times (2 \times 8) = (27 \times 2) \times 8 = 54 \times 8 = 54 \times (2 \times 4) = (54 \times 2) \times 4 = 108 \times 4 = 108 \times 2 \times 2 = (108 \times 2) \times 2 = 216 \times 2 = 432$$

5. Estrategias de representación interior

Nada habría que añadir respecto de lo ya apuntado en este terreno para la estructura aditiva, salvo ciertas situaciones a caballo entre lo manipulativo y gráfico.

Se trata del aprovechamiento del paralelismo entre el producto de dos factores y el cálculo del área de un rectán-

gulo. La papiroflexia o la descomposición en regiones de un rectángulo, permiten, a su vez, reducir productos complejos a sumas de otros más simples. (Como ilustración, ver, p. ej.: Fernández del Campo, 1997.)

6. Técnicas singulares

El Álgebra proporciona no pocas fórmulas que, aplicadas a la descomposición polinómica de los números en base 10, permiten una simplificación de cálculos, hasta reducir a sencillas reglas cálculos que, con otras estrategias, serían sin duda más complejos.

6.1 Cuadrado de un número

6.1.1 Como cuadrado de una suma. Para un número de dos cifras, tendríamos que su expresión polinómica en base 10 sería: $10a+b$; luego:

$$(10a + b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2$$

$$63 \times 63 = 63^2 = (60 + 3)^2 = 100 \times 36 + 10 \times 12 \times 3 + 9 = 3600 + 360 + 9 = 3969$$

$$405 \times 405 = 405^2 = (400 + 5)^2 = 100^2 \times 4^2 + 200 \times 4 \times 5 + 5^2 = 160000 + 4000 + 25 = 164025$$

6.1.2 Como cuadrado de una diferencia. Muy útil, cuando la cifra de las unidades es un 9 ó un 8:

$$(10a - b)^2 = 100a^2 - 20ab + b^2$$

$$39 \times 39 = 39^2 = (40 - 1)^2 = 100 \times 4^2 - 20 \times 4 \times 1 + 1^2 = 1600 - 80 + 1 = 1521$$

6.1.3 Como cuadrados de números con 5 en las unidades. La base 10 proporciona un hecho curioso y muy práctico:

$$(10a + 5)^2 = 100a^2 + 20 \times a \times 5 + 5^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100 \times a \times (a+1) + 25$$

Que, en la práctica, consiste en multiplicar la cifra o cantidad que indica las decenas por su inmediata superior y posponerle «25»:

$$45^2 = 100 \times 4 \times 5 + 25 = 2025$$

pasando directamente al resultado, sin desarrollo alguno.

$$405 \times 405 = 405^2 = 40 \times 41 \times 100 + 25 = 1640 \times 100 + 25 = 164025$$

6.2 Como «suma por diferencia». Según la conocida expresión de «diferencia de cuadrados»:

$$(a + b) \times (a - b) = a^2 - b^2$$

6.2.1 Producto de números simétricos respecto de la decena.

$$28 \times 32 = 32 \times 28 = (30 + 2) \times (30 - 2) = 30^2 - 2^2 = 900 - 4 = 896$$

6.2.2 Producto de números simétricos respecto de otro con 5 en las unidades. Es el caso de 42×48 , 37×33 , 81×89 , etc. Con un curioso resultado:

$$(10a + 5 + b) \times (10a + 5 - b) = (10a + 5)^2 - b^2 = ax(a+1) \times 100 + 25 - b^2 = ax(a+1) \times 100 + (5 + b) \times (5 - b)$$

La situación es análoga a la de cuadrados de números con «5» en las unidades, y del que pasaría a ser un caso particular. Queda como regla sencilla de aplicar, farragosa de expresar:

El producto de dos números de iguales decenas y unidades simétricas respecto de 5 se obtiene multiplicando la cifra de las decenas por la inmediata superior, y adjuntándole el producto de las unidades de ambos:

$$42 \times 48 = 4 \times (4+1) \times 100 + 16 = 2016$$

$$89 \times 81 = 8 \times (8+1) \times 100 + 9 = 7209$$

Técnicas y estrategias para el cálculo pensado de multiplicaciones

Permuta previa (aplicación de la propiedad conmutativa)			
Conversión aditiva			
Estrategias de distribución	Multiplicativo-aditivas	Descomposición según ordenes de unidades	Descendentes
		Ascendentes	
		Otras descomposiciones aditivas	
		Multiplicativo-sustractivas	
Estrategias de factorización	Factorización sobre el 10		
	Factorización general		
	Por partes alícuotas (o multiplicación-división)		
	<i>Mitad y doble</i>		
Mediante representación interior	Simbólica gráfica (de algoritmos escritos)		
	De acciones sobre material manipulativo		
	De situaciones gráficas		
Técnicas singulares	Cuadrado de un número	Como cuadrado de una suma	
		Como cuadrado de una diferencia	
		Cuadrados de números con 5 en las unidades	
	Como suma por diferencia	Números simétricos respecto de la decena	
		Números simétricos respecto de otro con 5 en las unidades	

4.4 TÉCNICAS Y ESTRATEGIAS PARA LA DIVISIÓN

A efectos de cálculo mental, el carácter inverso de la división respecto de la multiplicación en la estructura multiplicativa muestra no pocas semejanzas con análoga simetría entre adición y sustracción en la estructura aditiva. De hecho, existe un mayor paralelismo entre sustracción y división que entre ésta y multiplicación.

Los «recuentos» o «conteos» de la sustracción, se transforman aquí como ascensos o descensos con pasos de amplitud marcada por el divisor.

1. Estrategia aditivo-multiplicativa

Por alcance. O de ascenso por múltiplos. Como sucedía para la sustracción, el resultado -cociente por defecto, en este caso- viene dado por «el número de pasos» precisos para alcanzar el dividendo.

Si se advierte que el cociente supera la decena, el trayecto puede acortarse.

$$73 \div 9 = \{9; 18, 27..., (8 \text{ pasos})\} 72$$

$$68 \div 13 = \{13; 26, 39..., (5 \text{ pasos})\} 65$$

$$150 \div 12 = \{120; (10 \text{ pasos}), 132..., (12 \text{ pasos})\} 144$$

2. Estrategia sustractiva o «por reducción»

Con análogo proceso al anterior, pero tomando como punto de partida el dividendo. También hay lugar para los «atajos»:

$$53 \div 9 = \{53; 44, 35..., (5 \text{ pasos})\} 8$$

$$140 \div 12 = \{140 - 120 = 20; (10 \text{ pasos}), 18, (11 \text{ pasos})\} 2$$

3. Estrategias de distribución del dividendo

Como aplicación de la propiedad distributiva de una suma-resta- respecto de la multiplicación/división.

3.1 Distributivo-aditivas

3.1.1 Según órdenes descendentes de unidades. Los «restos parciales» para cada grupo de unidades en que se descomponga el dividendo, dan lugar a su vez a diversidad de estrategias.

Obsérvese que no se trata de una simple reproducción del algoritmo escrito usual, sino de un verdadero cálculo global. Su interrupción proporcionaría, cuanto menos, una aproximación del resultado; algo que viene dándose en la inmensa mayoría de las técnicas analizadas para cada operación.

$$97 \div 3 = (90 + 7) \div 3 = (90 \div 3) + (7 \div 3) = 30 + (7 \div 3) = 30 + 2 + (1 \div 3) = 32 + (1 \div 3)$$

$$138 \div 4 = (130 + 8) \div 4 = (130 \div 4) + (8 \div 4) = 30 + (10 \div 4) + (8 \div 4) = 30 + ((10 + 8) \div 4) = 30 + (18 \div 4) = 30 + 4 + (2 \div 4) = 34 + (2 \div 4)$$

$$138 \div 4 = (100 + 38) \div 4 = (100 \div 4) + (38 \div 4) = 25 + (38 \div 4) = 25 + 9 + (2 \div 4) = 34 + (2 \div 4)$$

3.1.2 Según otras descomposiciones. En las que suele acudir a múltiplos evidentes del divisor como sumandos o sustraendos del dividendo:

$$97 \div 3 = (30 + 30 + 30 + 7) \div 3 = (30 \div 3) + (30 \div 3) + (30 \div 3) + (7 \div 3) = 10 + 10 + 10 + (7 \div 3) = 30 + 2 + (1 \div 3) = 32 + (1 \div 3)$$

$$138 \div 4 = (80 + 40 + 10 + 8) \div 4 = (80 \div 4) + (40 \div 4) + (18 \div 4) = 20 + 10 + (18 \div 4) = 30 + 4 + (2 \div 4) = 34 + (2 \div 4)$$

3.2 Distributivo-sustractivas

$$97 \div 3 = (100 - 3) \div 3 = (100 \div 3) - (3 \div 3) = 33 + (1 \div 3) - 1 = 32 + (1 \div 3)$$

4. Factorizaciones

4.1 Factorizar el dividendo. Aplicable en muy pocos casos, pero eficaz:

$$300 \div 4 = (100 \times 3) \div 4 = (100 \div 4) \times 3 = 25 \times 3 = 75$$

$$500 \div 18 = (100 \times 5) \div 18 = (100 \div 18) \times 5 = (5 + (10 \div 18)) \times 5 = 25 + (50 \div 18) = 27 + (14 \div 18)$$

4.2 Factorizar el divisor. Estas estrategias se basan en la propiedad:

$$c \div (a \times b) = (c \div a) \div b$$

O, también, como estrategia de simplificación:

$$c \div d = (c' \times a) \div (d' \div a) = c' \div d'$$

proceso que continúa, hasta poder efectuar la división por la técnica más conveniente. En cualquier caso, exige un cierto conocimiento de los «criterios de divisibilidad», y su comprobación previa en dividendo y divisor:

4.2.1 Factorización ordinaria

$$138 \div 12 = 138 \div (3 \times 4) = (138 \div 3) \div 4 = 46 \div 4 = 11 + (2 \div 4)$$

El resto queda enmascarado, estrictamente, sería:

$$138 \div 12 = 11 + (6 \div 12)$$

Pero lo que interesa es, principalmente, el cociente.

4.2.2 Por «partes alícuotas». Con referencia a la propiedad:

$$c \div d = (c \div a) \div (d \div a)$$

Que va reduciendo paulatinamente el tamaño de dividendo y divisor. Pero también cabe la forma:

$$c \div d = (c \times a) \div (d \times a)$$

que, aunque aumenta el tamaño absoluto de dividendo y divisor, manteniendo intacto el cociente, puede conducir a un divisor más cómodo.

4.2.2.1 Por división-multiplicación

$$250 \div 75 = (250 \div (75 \div 3)) \div 3 = (250 \div 25) \div 3 = 10 \div 3 = 3 + \dots$$

4.2.2.2 Por multiplicación-división.

$$275 \div 25 = (275 \times 4) \div (25 \times 4) = 1100 \div 100 = 11$$

5. Recurso a representaciones interiores

Dándose, casi exclusivamente, la representación de la expresión gráfico-simbólica, referente a un «algoritmo escrito

reducido», y ello, para el caso de «divisor habitual» (p. ej.: de una cifra):

$$439 \div 7 = 6. + 19 \div 7 = 62 + 5 \div 7$$

$$1492 \div 11 = 1... + 392 \div 11 = 13... + 62 \div 11 = 135 + 7 \div 11$$

Que podrían prolongarse, aproximando el cociente -eso sí- mediante decimales. No es infrecuente que se transformen recíprocamente en la «estrategia distributivo-aditiva en órdenes descendentes de unidades» (tipo 3.1.1.1).

Técnicas y estrategias para el cálculo pensado de divisiones

Aditivo-multiplicativas (o <i>Por alcance</i>)	Aditiva pura		
	Multiplicativo-aditiva		
Sustractivo-multiplicativas (o <i>Por reducción</i>)	Sustractiva pura		
	Multiplicativo-sustractiva		
Estrategias de distribución del dividendo	Distributivo-aditivas	Según ordenes descendentes de unidades	
		Según otras descomposiciones aditivas	
	Distributivo-sustractivas		
Factorizaciones	Del dividendo		
	Del divisor	Ordinaria	
			Por división-multiplicación
			Por multiplicación-división
Recurso a representaciones interiores			

4.5 TÉCNICAS Y ESTRATEGIAS PARA EL CÁLCULO DE POTENCIAS

Los cuadrados se consideran como «productos de un número por sí mismo», reduciéndose a las estrategias de la multiplicación; en especial, los *productos notables* o *fórmulas singulares*, ofrecidos en los tipos del grupo 6. Las potencias superiores se basan en la aplicación de las propiedades de la potenciación; muy raras veces, como producto reiterado: casi exclusivamente para el cálculo de cubos.

1. Producto reiterado de la base

$$\begin{aligned} 6^3 &= 6 \times 6 \times 6 = (6 \times 6) \times 6 = 36 \times 6 = (30 + 6) \times 6 = 30 \times 6 + 6 \times 6 = \\ &180 + 36 = 180 + (30 + 6) = 210 + 6 = 216 \end{aligned}$$

2. Descomposición del exponente. Según su tamaño y estructura

2.1 Aditiva:

$$3^5 = 3^{3+2} = (3^3) \times (3^2) = 27 \times 9 = (20+7) \times 9 = (20 \times 9) + (7 \times 9) = 180 + 63 = 180 + 60 + 3 = 240 + 3$$

2.2 Por factorización:

$$2^8 = 2^{4 \times 2} = (2^4)^2 = 16^2 = 16 \times (10+6) = (16 \times 10) + (16 \times 6) = 160 + 96 = 160 + 90 + 6 = 250 + 6 = 256$$

$$5^6 = 5^{2 \times 3} = (5^2)^3 = 25^3 = 25 \times 25 \times 25 = (25 \times 25) \times 25 = 625 \times 25 = 625 \times 100 / 4 = 62500 / 4 = 15625$$

Como es evidente, en éstas y las que siguen, será preciso involucrar técnicas propias de la multiplicación.

2.3 Sustractiva. Muy útil, cuando se tiene automatizado algún resultado notable o recién obtenido:

$$2^9 = 2^{10-1} = (2^{10}) / (2^1) = 1024 / 2 = 1000 / 2 + 24 / 2 = 500 + 12 = 512$$

3. Descomposición de la base

3.1 Por factorización:

$$12^3 = (4 \times 3)^3 = (4^3) \times (3^3) = 64 \times 27 = 64 \times (9 \times 3) = (64 \times 9) \times 3 = ((60+4) \times 9) \times 3 = (540+36) \times 3 = 576 \times 3 = (500+70+6) \times 3 = 1500+210+18 = 710+18 = 728$$

3.2 Descomposición en cociente.

$$15^3 = (30/2)^3 = (30^3) / (2^3) = (3 \times 10)^3 / (2^3) = (3^3 \times 10^3) / (2^3) = 27 \times 1000 / (2^3) = 27 \times 1000 / 8 = 27000 / 8 = 3375$$

Técnicas y estrategias para el cálculo pensado de potencias

Producto reiterado de la base	
Descomposición del exponente	Aditiva
	Por factorización
	Sustractiva
Descomposición de la base	Factorización
	Descomposición en cociente

4.6 TÉCNICAS Y ESTRATEGIAS PARA EL CÁLCULO DE RAÍCES

Para el cálculo de raíces, ya sean cuadradas o cúbicas, suele acudirse a *técnicas por alcance* del radicando:

$$\sqrt{652} = \sqrt{400+...} = \sqrt{625+...} = 25+... < 26 = \sqrt{676}$$

En casos casi excepcionales, pueden ser aplicables propiedades de la radicación:

$$\sqrt{3600} = \sqrt{100 \times 36} = \sqrt{100} \times \sqrt{36} = 10 \times 6 = 60$$

$$\sqrt{576} = \sqrt{9 \times 64} = \sqrt{9} \times \sqrt{64} = 3 \times 8 = 24$$

Siendo entonces imprescindible tener automatizados los cuadrados perfectos, dominar las técnicas de descomposición multiplicativa y, en especial, la aplicación de los criterios de divisibilidad.

Técnicas y estrategias para el cálculo pensado de raíces

Por alcance	
Descomposición del radicando	Factorización
	Descomposición en cociente

La obligada «inexactitud» en la mayoría de divisiones entre números naturales y la complejidad en la multiplicación con factores con decimales o de tamaño considerable, nos lleva, de la mano del cálculo mental, a la necesidad de abrirse a nuevos horizontes.

5. ESTIMAR, APROXIMAR

5.1 Consideraciones generales

El cálculo mental o pensado tiene más aplicaciones que la respuesta exacta a una operación precisa. Conviene no olvidar su versión «imperfecta»: la **estimación**.

La fama de las matemáticas como ciencia exacta no justifica prescindir de aquello que es útil en la vida diaria y que, además, hace reflexionar sobre las propiedades de los números¹

Estimar», en matemáticas, significa valorar una operación o una medida en función de las circunstancias de quien emite el juicio. «Lo que caracteriza la estimación es que quien hace la valoración ha de tener alguna información sobre la situación, el resultado no es necesario que sea exacto y el cálculo se hace mentalmente (con lo que esto implica, es decir, números sencillos y cálculo rápido)².

Pueden distinguirse dos aspectos aritméticos:

a) Obtención del número como recuento o medida, sin otra operación que la de comparar -medir-, conocida como **estimación** propiamente dicha.

La estrategia esencial para la estimación así entendida es la combinatoria de representaciones interiores, con presencia o no de referentes físicos. Aunque también cabe la estimación como puro juicio lógico-deductivo, por comparación numérica y juicio de posibilidad real; pero esto supone un cierto cálculo aritmético, efectuar alguna operación.

b) Obtención de un número como resultado de una operación aritmética a partir de datos análogos a los suminis-

¹ Alsina y otros (1996: op. Cit., pág. 114

² Alsina y otros (1996): op. Cit., pág. 105

trados, pero conservando la operación. Conocida también por **aproximación** o **cálculo aproximado**.

Aquí, estamos ante un auténtico *cálculo aritmético pensado*, pero con decisiones previas: sustitución de los datos originales por otros más sencillos, juicio de adecuación para estos nuevos datos y juicio de validez del procedimiento global.

En ambos casos:

—Como procedimiento, conveniente cuando las cantidades son grandes o complejas, aporta claridad y comprensibilidad a la situación.

—Instrumento de control para el cálculo exacto; sea éste mental, escrito o por calculadora u otro dispositivo. Ya que anticipa márgenes de validez para el resultado obtenido por dicha vía.

—Ejercita *estrategias de gran importancia en la aritmética y en el trabajo con la medida de magnitudes*³.

—*Contribuye a la formación matemática y, al mismo tiempo, facilita el uso de la matemática en las situaciones cotidianas*⁴.

*Muchas veces nos quejamos de que el alumnado da respuestas absurdas a problemas, cálculos o medidas. La habilidad para hacer estimaciones y el contraste entre el valor estimado y el valor calculado hace desarrollar lo que llamamos sentido común*⁵.

Como aplicación específica del cálculo mental, el cálculo estimativo o aproximado se enfrenta con los mismos inconvenientes que aquél. Incluso algún otro adicional:

³ Castro, Encarnación, Rico L. y Castro Enrique (1996): *Números y operaciones* (Fundamentos para una Aritmética escolar). Ed. Síntesis, Madrid. Pág. 91.

⁴ Alsina y otros (1996): *op. Cit.*, pág. 105)

⁵ *Ibíd*

a) Creencias contrarias. Tanto profesores como alumnos -la «gente corriente», en general- tienden a identificar «lo matemático» con «lo exacto». En consecuencia, no es de extrañar una cierta repugnancia en partir de *lo aproximado* para llegar también a *lo aproximado*: ¿es aceptable, «a priori», un error en matemáticas?; ¿de qué dimensiones?

b) Así pues, el cálculo aproximado deberá vencer, de ordinario, la creencia en tal identificación a ultranza.

c) Mayores dificultades de evaluación. A la hora de intentarla, se complica aún más: incluso la respuesta en resultado numérico no es objetiva. Existen «grados de aproximación», según el sujeto que efectúe el cálculo y las necesidades de la situación concreta. A menos que se complejice tal evaluación, tomando en cuenta el error relativo, «todas las respuestas -en un cierto grado- son válidas». Pero «algunas más que otras»: precisamente el juicio acerca del «grado de validez» o «adecuación situacional» es uno de los objetivos educativos que se persigue con esta práctica.

5.2 Técnicas y estrategia

El cálculo aproximado, en cuanto cálculo, se sirve de las mismas estrategias y técnicas que el cálculo pensado, del cual es tributario. Pero en los actos de sustitución de los datos, y validación del resultado cuenta con técnicas propias:

1º) Técnicas de «sustitución aproximativa de los datos»

a) *Truncamiento* o «redondeo inferior». Por la que un número pierde las unidades, reduciéndose a sus decenas:

$$43 \equiv 40$$

$$67 \equiv 60$$

$$174 \equiv 170$$

y aun a sus centenas:

$$174 \equiv 100$$

$$315 \equiv 300$$

b) *Redondeo superior*. Análoga a la anterior, pero añadiendo cuantas unidades sean precisas para alcanzar la decena o centena superior:

$$43 \equiv 50$$

$$67 \equiv 70$$

$$174 \equiv 180$$

o a las centenas:

$$174 \equiv 200$$

$$315 \equiv 400.$$

c) *Redondeo equilibrado o simple*. La técnica más usual, sustituye el número por aquél formado sólo por decenas -resp.: centenas- más próximo, complementando o retirando unidades: $43 \equiv 40$, $67 \equiv 70$, $174 \equiv 170$; o, en centenas:

$$174 \equiv 200$$

$$315 \equiv 300$$

Esta sustitución puede efectuarse sobre uno solo de los datos -lo que ya simplificaría un tanto el cálculo posterior- o sobre ambos. En este segundo caso, la sustitución puede hacerse independientemente para cada uno de ellos, aplicando la técnica que parezca más conveniente o considerando ambos en conjunto.

d) *Complementación*. Afecta a ambos operandos, aplicando uno u otro redondeo a cada uno de ellos, según juicio de conveniencia relativo a la operación.

$$43 + 174 \equiv 40 + 180$$

$$43 \times 174 \equiv 40 \times 170.$$

En todos los casos, el cálculo mental con decenas (resp.: centenas) se reduce a operandos inferiores en una cifra a los datos:

$$40 + 180 = (4 + 18) \times 10$$

$$40 \times 170 \equiv (4 \times 17) \times 100.$$

Cabe también que el redondeo se realice respecto del múltiplo de 5, 50 o 500 más próximo; sobre todo, si se dominan los cálculos con operandos de este tipo. Como serían:

$$43 + 174 \equiv 45 + 175 = (4 + 17) \times 10 + 10$$

$$43 \times 162 \equiv 45 \times 160 = 9 \times 5 \times 160 = 9 \times 800$$

2º) Técnicas de aproximación del resultado obtenido

La conciencia de haber «falseado los datos» por conveniencia del cálculo mental, puede invitar a «corregir» el resultado así obtenido, incrementándolo o reduciéndolo en función de los datos primitivos y sustituidos, y del carácter de la operación.

Tal revisión -de producirse- supone un conocimiento en profundidad de los efectos de cada operación, en función a su vez de las características de los datos. Y, aun produciéndose internamente, no tiene por qué reflejarse en una modificación del resultado.

El proceso puede reducirse a un simple redondeo o modificación; pero puede que invite a *retocar* las sustituciones de los datos y prolongarse con una operación complementaria, o a ambas cosas a la vez.

Técnicas específicas del *cálculo aproximado*

Sustitución de datos	Simple (o independiente)	Redondeo a la decena	Truncamiento (rde. inferior, por defecto)
			Superior (por exceso)
			Equilibrado (ordinario)
		Redondeo a múltiplo de 5	
		Otros	
	Doble	Doble truncamiento	
		Redondeos	Doble redondeo superior
			Doble redondeo equilibrado
			Doble redondeo al múltiplo de 5
		Mixtos	
		Complementación	
		Otros	
Revisión del resultado	Revisión simple (sin mediar operación complementaria)	Aditiva (o de complementación)	
		Sustractiva (o reductiva)	
	Revisión mediante operación complementaria)	Revisando los datos y rehaciendo la operación	
		Mediante operación parcial con complementación de datos	
		Mixta	

Técnicas específicas del *cálculo aproximado*
Sustitución de datos

Simple (o independiente)	Redondeo a la decena	Truncamiento (redondeo. inferior, por defecto)
		Superior (por exceso)
		Equilibrado (ordinario)
	Redondeo a múltiplo de 5	
	Otros	
Doble	Doble truncamiento	
	Redondeos	Doble redondeo superior
		Doble redondeo equilibrado
		Doble redondeo al múltiplo de 5
	Mixtos	
	Complementación	
	Otros	

Aproximación por revisión del resultado

Revisión simple (sin mediar operación complementaria)	Aditiva (o de complementación)
	Sustractiva (o reductiva)
Revisión mediante operación complementaria)	Revisando los datos y rehaciendo la operación
	Mediante operación parcial con complementación de datos
	Mixta

6. GRADACIÓN Y PREVISIONES CURRICULARES

6.1 Principios didácticos

Desde el aprendizaje inicial del « $1+1=2$ », « $2+1=3$ »... hasta llegar a las respuestas inmediatas « $83 \times 87 = 7221$ », « $125 \times 36 = 4.500$ » o « $456 \div 32 = 14,25$ », hay un trecho...

Salvo muy raras excepciones, el cálculo mental o pensado *no surge de forma espontánea*, ni se *aprende inmediatamente*. Es fruto de la práctica, la manipulación numérica sistemática, el razonamiento. Como todo proceso de aprendizaje, debe concebirse como un *crescendo*, en el que -es de esperar- el alumno progrese, casi insensiblemente, si el itinerario y las situaciones respetan los principios de un «buen hacer didáctico».

Estos *principios* guardarían relación con los *condicionantes* apuntados en el Capítulo 3.

Adecuación al «nivel madurativo» en las aptitudes de atención, concentración mental y recursos de memoria

Cierto que -como se indicó en el Capítulo 2- el propio ejercicio del cálculo pensado puede contribuir al desarrollo de estas capacidades. Pero el soporte positivo que suponen unas, y el estímulo que implica el otro, deben mantenerse en la «zona de desarrollo potencial» de la que habla Vygotsky. Es decir: provocar el desarrollo de estas capacidades, forzando suavemente a su ejercitación, pero sin dar lugar al desaliento, por reiteración de fracasos.

Asimilación previa del concepto matemático de referencia para la *operación formal* planteada en la *situación problemática* (o como situación, ella misma)

De otro modo, se reduciría el cálculo mental a un esquema estímulo-respuesta (E-R), negador del razonamiento y generación y elección conscientes de estrategias. Se me

antoja «absurdo» ejercitarse en el cálculo -mental, escrito o por calculadora- de multiplicaciones abstractas sin poseer una mínima idea antecedente del «significado real de la operación de multiplicar»: el cálculo está al servicio de la resolución de problemas, debiendo situarse ésta por encima del valor del cálculo en sí mismo.

Podría admitirse un *simple nexos de automatismo* para los *conteos y hechos numéricos elementales* («tablas de operaciones»). Pero las técnicas de cálculo mental que implican la aplicación de *propiedades estructurales* exigen su comprensión, por imperfecta y tambaleante que ésta sea.

En consecuencia: una técnica de cálculo mental no puede anticiparse a la comprensión conceptual, aunque ésta sea «intuitiva» (desde luego: «no formalizada», en los niveles elementales de enseñanza). Si bien cabe esperar que la aplicación reiterada de la técnica contribuirá a la sedimentación y engarce estructural de dicho concepto o propiedad, sobre todo «si le sigue inmediatamente en el tiempo».

Dominio de la estructura numérica (aritmética) de los operandos y sus representaciones en los diferentes lenguajes.

Y ello, cualquiera que sea la estructura del lenguaje «preferida por el calculista».

Por ejemplo: para el «16», cabría pensar en estructuras numéricas del tipo:

$$16 = 10+6, 6+10, 15+1, 1+15, 8+8, 8 \times 2, 2 \times 8, 4 \times 4, 20-4, 10+5+1, 80 \div 5 \dots$$

Conocer -dominar, más bien- sólo alguna o algunas de ellas, condicionaría las técnicas a emplear en una situación calculatoria determinada. Disponer -»representárselas»- de forma ágil de todas o muchas de ellas, permite elegir más fácilmente la más *explotable* en la situación».

Análogamente: el operando «1,25» puede parecer monstruoso para un ejercicio escolar de cálculo mental, aun en

Secundaria. Muy otra es la opinión, si se ha considerado y manejado con anterioridad como

$$1,25 = 5 \div 4 = 10 \div 8 = 125 \div 100 = 0,25 \times 5 = 1 + 0,25 = 1 + \frac{1}{4} = \dots$$

Como es evidente, sólo se están analizando ahora «representaciones» relativas a la expresión escrita. La experiencia manipulativa y el contexto cultural pueden ofrecer estructuras muy distintas para estos dos ejemplos.

Me atrevería a decir que el lector no habituado al cálculo mental apenas si pensó tan sólo en « $16 = 10 + 6$ » y « $1'25 = \dots$ » ¿A qué fue debido? A la fuerza del contexto escrito, a influencias de la verbalización (aunque fuera no consciente; en castellano: «diez-y-seis») y -ojalá no fuera así- a una escasa «manipulación de la estructura numérica» de esas cantidades.

Por consiguiente:

Práctica del cálculo mental *inverso* o *regresivo*

Entendiendo por tal las *descomposiciones estructurales de los números*, tal como se muestra en los ejemplos de más arriba.

Es decir: no basta con agilizar las respuestas a situaciones del tipo: « 2×8 », « $25 - 9$ », « $80/5$ »...; sino que, en previsión de su aplicabilidad ulterior, y a medida que se introducen operaciones y propiedades, deben reclamarse respuestas ágiles y extensas a cuestiones como: «¿de cuántas formas puede obtenerse 16 como resultado?...»

Además las respuestas a esta clase de ejercicios pueden mostrar el «horizonte en el tamaño de los operandos» abarcado por el alumno-calculista, escenario de partida para situaciones más complejas.

Involucrar y respetar el orden de introducción de las operaciones y campos numéricos previstos en el currículum para los operandos y el resultado

Este principio determinará, en buena medida, los ejercicios y situaciones problemáticas a proponer, y permitirá calificarlos como «apropiados» o «inapropiados».

Adviértase que se habla de «dominio numérico», no tanto de «rango» o «tamaño» de los «operandos». Los excesos reiterados pueden provocar desalientos; los puntuales, cual desafío, excitan a la superación y ensayo de nuevas técnicas.

Tendencia a la diversificación de estrategias y fomento de la investigación personal de técnicas particulares

Principalmente, como aplicación de las *propiedades estructurales* de cada «operación». Y, siempre, siguiendo inmediatamente a su conocimiento.

Atención -exigencia- a las cualidades de *exactitud*, *agilidad* y *seguridad*

Como es evidente: *exactitud*, si es éste el objetivo. Si lo fueran la *aproximación* o la *estimación*, se guiarían por *una tendencia decreciente en el error*. Hecha esta salvedad:

—La *exactitud* debe ser una **exigencia irrenunciable**.

—La *agilidad* o *rapidez* en la respuesta, una **conveniencia** a alentar y aun exigir progresivamente.

—La *seguridad subjetiva* -absoluta o relativa, tan difícil de evaluar-, un **fruto esperable** del éxito continuado.

Estas tres cualidades tienen una fuente común: el éxito reiterado, provocado por el planteamiento de situaciones

problemáticas suficientemente sencillas. Pero sin ceder a la autocomplacencia estéril: alcanzado un cierto nivel de satisfacción, se reanuda la marcha con más arduas tareas, sobre todo, incrementando el tamaño y número de «operandos» y «resultado».

Atención a las variables en la forma de presentación de la situación y de respuesta

Como se indicaba pormenorizadamente en el Capítulo 2, las dificultades de visión pueden distorsionar la evaluación del cálculo mental, alterando por tanto el ritmo de progreso en la complejidad de las situaciones a proponer. Desde el punto de vista didáctico y motivacional, me atrevería a más: los estudiantes ciegos y deficientes visuales se muestran más apreciativos y capacitados para las situaciones presentadas en forma oral y que exigen, a su vez, una respuesta oral. Por otra parte, es ésta la fórmula más cómoda y formativa de ejercicio en el aula, favoreciendo las competencias y la participación y contraste subjetivos generalizados. Razones más que suficientes para hacerla preferible, aunque deberán practicarse todas las demás, siempre que ello sea posible (recuérdese lo comentado a propósito de los programas informáticos).

Atención al *carácter* de la situación (exclusivamente numérica, o problemática)

Entendiendo que la complejidad operatoria en situaciones abstractas (exclusivamente numéricas, con independencia de la forma de presentación) deberá ser superior a las contenidas o provocadas por la resolución por cálculo mental de situaciones problemáticas. A las primeras se refieren exclusivamente el panel de Objetivos y Ejercicios que se ofrecen en estas páginas para cada nivel educativo; aunque una formación adecuada deba combinarse con prácticas oportunas en las segundas, siguiéndolas inmediatamente en nivel de dificultad.

6.2 Previsiones curriculares

El cálculo mental puede y «debe» formar parte del quehacer cotidiano de aula.

De hecho, lo está: cualquier ejercicio calculatorio implica cálculo mental. Salvo que «se abandonen completamente» los cálculos a la calculadora en cuanto haya un movimiento de «comprobación» o «control» de cualquier tipo, se exige Cálculo Mental. El recurso a soportes materiales o gráficos, difícilmente se reduce a «simple conteo» muy pronto aparecen agrupaciones y operaciones parciales de carácter exclusivamente mental, o se prescinde del soporte y se actúa sobre su «representación interior».

Se formula aquí un itinerario de objetivos y contenidos propios para el cálculo mental, paralelo en buena medida a los previstos en aritmética con carácter general por las normas vigentes en España.

En los cuadros que siguen se indican tan sólo las «destrezas-objetivo finales para cada ciclo». En los ejercicios de referencia ofrecidos en el apartado siguiente se señala un verdadero *itinerario* o *gradación de destrezas intermedias*.

Educación infantil

Las referencias a cálculo aritmético, como tal, son muy escasas. Casi podría decirse que única:

«Efectuar sumas y restas de una unidad (hasta 10) para la realización de problemas sencillos.»

Pero no deben olvidarse los *conteos* verbales que suponen un cálculo aditivo o sustractivo encubierto:

uno, $(1+1=)$ dos, $(2+1=)$ tres...

cinco, $(5-1=)$ cuatro, $(4-1=)$ tres...

Sobre todo si el aprendizaje de la serie numérica natural

se lleva a cabo a partir de situaciones manipulativas o gráficas de carácter problemático, no exclusivamente simbólico (que lo reducirían a la adquisición de una mera destreza lecto-escritora). *Cálculo mental subyacente* que puede tener como *sopORTE* no importa qué tipo de *representación interior*.

Por esta razón, los *conteos ascendentes y descendentes* se incluyen como objetivo y contenido propios de esta etapa en su nivel terminal, pudiendo iniciarse en cualquier momento.

Educación Infantil. Destrezas/Objetivo

Conteos	Ascendentes (hasta 31)
	Descendentes (desde 30)
Sumas	De dos sumandos, con resultado menor que 10
Descomposiciones aditivas	En dos sumandos, de números menores que 10
Restas	Términos menores que 10
Descomposiciones sustractivas	En dos términos, de números menores que 10

Educación primaria

Es la etapa propicia para practicar los cálculos mentales y adquirir sus automatismos básicos y despertar el interés por estrategias que lo potencian.

El primer objetivo ha de ser, indudablemente, el dominio de los *hechos numéricos básicos*; más conocidos como *tablas de operaciones*. En realidad, se reducen a la adición y multiplicación, ya que resta y división exacta son su formulación inversa; en términos de cálculo mental, expresión del auténtico dominio de aquéllas. Paralelamente, la explicitación de «descomposiciones», que servirán de base a los algoritmos o estrategias de cálculo mental con cantidades mayores.

La realización de cálculos mentales más allá de esos límites -operaciones con un operando de dos cifras, por ejemplo- serán, precisamente, un excelente control de haber superado la fase de *simple automatización*, para adentrarse

en terrenos de *cálculo pensado* y «mejor comprensión de la estructura de esa operación», aunque pudiera permanecer ligada a su representación decimal escrita, e incluso depender de ella.

Pero la mayoría de las estrategias aritméticas se apoyan en la «descomposición decimal de los operandos» según *unidades de diferente orden*; v. gr.: $35=30+5$, $123=100+20+3$, etc. Conviene, por tanto, no excluir de las actividades de cálculo mental este tipo de *descomposiciones aditivas* y subrayado del *reconocimiento de órdenes de unidades*, ya desde el Primer Ciclo (desde el momento mismo en que empiecen a manejarse habitualmente cantidades de dos cifras).

En el Segundo Ciclo, conforme con el currículo oficial, se proponen *estimaciones*» y *cálculos aproximados*, tan útiles para resolver situaciones cotidianas como para control de cálculos por otros medios.

Entre los objetivos propuestos oficialmente para esta etapa, apenas si existe referencia indirecta al cálculo mental, exacto o de estimación:

“Resolver y plantear problemas matemáticos utilizando los procedimientos adecuados de cálculo, medida, estimación y comprobación de resultados.” (Objetivo 4)

Será para cada ciclo donde se presente una «cierta concreción» en los «Criterios de Evaluación» (conocimientos y destrezas mínimos); pero sin determinar destrezas-objetivo.

No debe extrañar que los objetivos y actividades que aquí se proponen excedan los apenas indicados en el currículo oficial. La justificación se encuentra en la propia entraña de estas páginas: **el cálculo mental es de suma utilidad para el estudiante ciego o deficiente visual**. No nos conformemos, pues, con los *mínimos exigibles para la generalidad de los alumnos*: propongámosles actividades que, en alguna medida, les estimule -incluso fuerce- a progresar por esta vía.

Fieles al propósito de abarcar por cálculo pensado las operaciones que se realizan de ordinario en la clase y tareas matemáticas -dentro de límites razonables- es natural extenderlo a dominios raramente considerados: fracciones enteras, decimales, potenciación y radicación.

Primer Ciclo

En el currículo oficial se encuentran escasas referencias directas:

“Conocer y utilizar las parejas de números cuya suma sea un número menor o igual a diez.” (Criterio de evaluación 2).

“Conocer los productos de los factores que forman las tablas de multiplicar de los números: 1, 2, 5 y 10.” (Criterio de evaluación 4).

“Calcular mentalmente el doble de un número de dos cifras significativas menores que cinco y la mitad de un número de dos cifras pares, distintas de cero. Además, realizar mentalmente cálculos de sumas y restas que no impliquen cambio de unidad en el Sistema de Numeración Decimal.” (Criterio de evaluación 5).

E, indirectamente, en otros Contenidos y Criterios de Evaluación (el subrayado es nuestro):

“Los números naturales. Relaciones de orden. El Sistema de Numeración Decimal: cifras y «valor posicional de las cifras».” (Contenido 1).

“Operaciones con números naturales: adición y sustracción. «Estimación». «Automatización de las operaciones». Concepto intuitivo de multiplicación. «Iniciación a las tablas de multiplicar».” (Contenido 2).

“Calcular sumas y restas, comprobando el resultado obtenido con «estimación lógica».” (Criterio de evaluación 3).

Nuestra propuesta, concretada en objetivos de destrezas operatorias de cálculo mental, sería:

Educación Primaria, Primer Ciclo. Destrezas/Objetivo.

Conteos	Ascendentes
	Descendentes
Reconocimiento de órdenes de unidades	En cantidades de hasta tres cifras
Sumas	De dos sumandos, ambos de dos cifras, con resultado menor que 100
	De tres sumandos, con resultado menor que 100
	De dos sumandos, uno de ellos mayor que 100, pero sin cambio de centena
Descomposiciones aditivas	Según órdenes de unidades
	De cantidades de dos cifras, en tres sumandos
Restas	Entre cantidades de dos cifras
Descomposiciones sustractivas	En tres términos, de cantidades menores que 100
	En dos términos, de cantidades de tres cifras
Multiplicaciones	Tabla de multiplicar del 1, del 2, del 5, y del 10
	De una cantidad de dos cifras por 2 (y viceversa), con resultado menor que 100 y sin que implique conversión de unidades
	Ídem por 10
Descomposiciones multiplicativas	Inversas de las prestaciones en la «porción de tabla de multiplicar» construida
	De cantidades de tres cifras múltiplos de 10, en dos factores
Divisiones	Correspondientes a la «porción de tabla de multiplicar» construida

Segundo Ciclo

De nuevo, la referencia explícita al cálculo mental es bien restringida y general:

“Realizar mentalmente cálculos sencillos sobre las cuatro operaciones.” (Criterio de Evaluación 3).

Indirectamente, pueden concluirse otros aspectos analíticos y estimativos:

“I. Aritmética y medida. 1. Los números naturales.

Relaciones de orden. El Sistema de Numeración Decimal. Cifras. Valor posicional de las cifras. Equivalencias.” (Contenido 1).

“Operaciones con números naturales: adición, sustracción, multiplicación y división. Estimación. Automatización de los algoritmos.” (Contenido 2).

“Leer, escribir y ordenar números naturales de hasta seis cifras, indicando el valor posicional de sus cifras.” (Criterio de Evaluación 1).

“Calcular sumas, restas y multiplicaciones, y dividir un número de hasta seis cifras por otro número de una cifra, comprobando el resultado obtenido con estimación lógica y aproximación matemática.” (Criterio de Evaluación 2).

Como propuesta en términos de objetivos de destrezas operatorias, enunciamos:

Educación Primaria, Segundo Ciclo. Destrezas/Objetivo.

Reconocimiento de órdenes de unidades	En cantidades enteras de hasta seis cifras
	En cantidades con hasta dos cifras decimales
	Conversión de unidades, desde unidades de millar hasta centésimas
	Construcción de cantidades enteras de tres cifras
Sumas	Sucesiones crecientes de diferencia entera menor que 10
	De dos sumandos de hasta tres cifras, con resultado menor que 1.000
	De tres sumandos, cada uno de ellos menor que 100
Descomposiciones aditivas	Según ordenes de unidades enteras, y parte decimal
	De cantidades enteras de tres cifras, en tres sumandos
Restas	Sucesiones decrecientes de diferencia entera menor que 10 (en valor absoluto)
	Con minuendo de hasta tres cifras, sin cambio de centena
	Diferencia entre la unidad y un número decimal, hasta las centésimas

Descomposiciones sustractivas	En tres términos, de cantidades menores que 1.000
Multiplicaciones	Tabla de multiplicar hasta el 12
	De dos factores, uno de ellos de dos cifras
	De un número de una cifra por otro de tres, sin implicar cambio de unidades en la centenas
	De tres factores menores o iguales que 10
	De un número con parte decimal hasta las centésimas, por un entero de una cifra
Descomposiciones multiplicativas	Inversas de las incluidas en la «tabla de multiplicar» (hasta el 12)
	De cantidades de dos cifras, en tres factores
	De cantidades de tres cifras múltiplos de 10, en dos factores
	De un número de tres cifras con parte decimal hasta las centésimas, siendo ésta múltiplo de 25
Divisiones	Correspondiente a la «tabla de multiplicar» (hasta el 12)
	Entre números enteros de dos cifras, con cociente exacto de una cifra
Descomposiciones en cociente	De números de una cifra, con dividendo de hasta dos

Tercer Ciclo

“Números naturales y sus operaciones: propiedades y relaciones. Equivalencias entre los elementos del Sistema de Numeración Decimal. Estimación. Automatización de los algoritmos. Iniciación a la potenciación. Iniciación a la divisibilidad.” (Aritmética y medida. Contenido 1)

“La fracción y el número decimal. Propiedades y operaciones.” (Contenido 3)

“Magnitudes y su medida: longitud, capacidad, masa, tiempo, superficie y volumen. Unidades del Sistema Métrico Decimal, equivalencias y relaciones. Instrumentos de medida.” (Contenido 4)

“Descomponer en factores primos un número menor o igual que mil, así como obtener múltiplos y divisores de un número menor o igual que cien.” (Criterio de evaluación 5)

“Leer, escribir, ordenar y operar con fracciones y números decimales, y resolver problemas sencillos en los que se

utilicen: la fracción, el número decimal, la relación entre ellos, el redondeo y el tanto por ciento.” (Criterio de evaluación 8).

“Resolver y formular distintas situaciones problemáticas en las que se utilicen unidades y equivalencias del Sistema Métrico Decimal (longitud, capacidad y masa) del sistema monetario y de la magnitud tiempo.” (Criterio de evaluación 9).

El desarrollo de Destrezas/Objetivo en cálculos con números naturales se orientará, sobre todo, en el mayor tamaño de los operandos y mayor agilidad, junto con la aplicación extensiva de las técnicas de *estimación* y *aproximación de resultados*.

Las dificultades que pudieran aparecer al trabajar con números decimales o negativos se deben más al efecto «sorpresa» -«falta de hábito»-, que a causas intrínsecas de la situación. No hay motivo objetivo para que resulte más difícil calcular « 5×7 » que « 5×7 » o « $0,35 + 0,45$ » que « $35 + 45$ »; si no es por los «distorsionantes» «menos» o «centésimas», en situaciones verbales, o los signos «-» y «,» de las situaciones escritas. Si bien serían asequibles por dificultad calculatoria pura, deberán retrasarse hasta que se hayan introducido los correspondientes conceptos y situaciones, conforme con el currículo de contenidos, tal como se aconsejaba en el apartado anterior.

La mayor dificultad de cálculo con fracciones guarda relación con una variable bien diferente, de carácter subjetivo: el grado de desarrollo de aspectos de *memoria inmediata*. Para la adición de fracciones -una de las situaciones más complejas-, por ejemplo, entrarían en juego hasta *seis registros numéricos*:

Dos para cada una de las fracciones-sumando; un registro para cada término, ocupados originalmente por los datos, a sustituir en el transcurso del proceso por los *términos transformados* (con igual denominador).

Un registro para el *denominador común*; término también en el resultado final.

Un registro *auxiliar*, que albergaría para cada fracción el *factor de equivalencia* (cociente entre el *denominador común* y el de la fracción considerada). En la fase definitiva, recibiría el *numerador-suma*.

Bien que cabe el recurso a técnicas con soporte en imágenes gráficas o de material manipulativo, pero que entrañan asimismo la práctica con este tipo de representaciones.

Educación Primaria, Tercer Ciclo. Destrezas/Objetivo.

Órdenes y conversión de unidades	Conversión de unidades del SM
	Det. De órdenes en expresiones de hasta tres cifras decimales
Sumas	Sumandos enteros de cuatro cifras
	Sumandos con sólo parte decimal de tres cifras, de igual orden menor
	Sumandos con parte entera y hasta dos cifras decimales de distinto orden menor
Descomposiciones aditivas	Descomposición decimal de números de hasta cuatro cifras, con dos decimales
	Descomposición decimal de números de hasta cuatro cifras, y hasta tres decimales
Restas	Minuendo de cuatro cifras y sustraendo de tres, sin cambio en las unidades de millar
	Términos de cuatro cifras, sin conversión de unidades
	Términos con sólo parte decimal de hasta dos cifras de distinto orden menor
Descomposiciones sustractivas	Complemento a la unidad, para una fracción de términos de dos cifras
Multiplicaciones	Un factor de tres cifras y otro de una, con resultado menor que 1.000
	Progresiones geométricas (crecientes) de razón menor que 10
	Factores de dos cifras simétricos respecto de un múltiplo de 5
	Uno de ellos factorizable
	Cuadrados
	Aproximación (caso general)
	Múltiplos de números de dos cifras (hasta 300)
	Fracciones equivalentes a una dada, con términos de hasta dos cifras
	Reducir a común denominador fracciones con términos de hasta dos cifras
	Producto de Fracciones con términos de una cifra
	De un entero por una fracción con términos de una cifra
	De un entero por una fracción con términos de una cifra

Multiplicaciones	Un factor de hasta cinco cifras, y hasta tres de ellas decimales, por una potencia de 10
	Un factor con hasta dos cifras decimales por un entero menor que 10
Descomposiciones en productos	Cálculo de los divisores de un número de dos cifras
	Descomposición en factores primos de números de dos cifras
Divisiones	Dividendo de tres cifras y divisor de una
	Dividendo y divisor de dos cifras
	Simplificación sucesiva de fracciones con términos de hasta dos cifras
	Un número de hasta cinco cifras, y hasta dos de ellas decimales, entre una potencia de 10
	Expresar en forma decimal una fracción con términos de una cifra
Descomposiciones en cociente	Progresiones geométricas (decrecientes) de razón inversa de un número menor que 10
	Conversión en fracción entera de un número menor que 1, de hasta tres cifras decimales
	Conversión en fracción entera de un número mayor que 1, y hasta con dos cifras decimales

Educación Secundaria

Educación Secundaria Obligatoria (cursos 1º y 2º).
Destrezas/objetivo.

Conteos	Ascendentes y descendentes, sin límites
Órdenes y conversión de unidades	Conversión de unidades del SM para expresiones con coma
Sumas	Sumandos con sólo parte decimal de hasta tres cifras, de distinto orden menor
	Fracciones con términos de una cifra
	Un entero más una fracción con términos de una cifra
	Sumandos enteros (generales) de hasta tres cifras
	Progresiones aritméticas crecientes (diferencia menor que 10 en valor absoluto)
Descomposiciones en cociente	Descomposición sobre media unidad de hasta dos órdenes superiores, para números de tres cifras decimales
Restas	Minuendo de cuatro cifras y sustraendo de tres
	Términos de cuatro cifras; con conversión de hasta dos órdenes de unidades
	De dos fracciones con términos de una cifra
	Entre un entero y una fracción con términos de una cifra
	Términos con sólo parte decimal de hasta tres cifras de distinto orden menor
	Términos con parte entera y hasta dos cifras decimales de distinto orden menor
	Minuendo y sustraendo de dos cifras (resultado entero)

Multiplicaciones	Factores de dos cifras (caso general)
	Aproximación a las centésimas: factores menores que 1, con hasta dos cifras decimales
	Factores menores que 1, con hasta dos cifras decimales
	Aproximación a la parte entera: factores con parte entera y hasta dos cifras decimales
	Porcentaje menor del 10% de un número menor que 1.000
	Porcentaje menor del 100% de un número menor que 100
	Aplicación de la <i>regla de los signos</i> para productos de números enteros
	m.c.m. (menor que 200) de dos números de dos cifras
Descomposiciones en productos	Aplicación de los criterios de divisibilidad para números menores que 300
	Para números de hasta cuatro cifras, con parte decimal múltiplo de 5
Divisiones	Progresiones geométricas (decrecientes) de razón inversa de un número menor que 10 (exactas)
	Dividendo de tres cifras y divisor factorizable de dos
	Fracción irreducible equivalente a otra dada, con términos de dos cifras
	Cociente de fracciones con términos de una cifra
	Entre fracción y entero, y viceversa
	Fracción decimal equivalente a una dada con términos de hasta dos cifras
	Un número mayor que 1, con parte decimal de hasta dos cifras, entre un entero menor que 10
	Un número mayor que 1, con parte decimal de hasta dos cifras, entre 25
	Un número menor que 1, con hasta dos cifras decimales, entre 0,5 y 0,25
Descomposiciones en cociente	Aplicación de los Criterios de divisibilidad para números de hasta tres cifras
Potencias	Cuadrados de números menores que 100
	De fracciones con términos menores que 30
	De números menores que 1 y hasta dos cifras decimales
	Cubos de números menores que 10
	De fracciones con términos de una cifra
	De números de una cifra decimal
	Potencias de 2, hasta 2^{16}
Raíces cuadradas	Aproximación (hasta la unidad de orden superior) de potencias de base y exponente menores que 10
	Aplicación de la descomposición (aditiva, multiplicativa y sustractiva) del exponente, para bases menores que 10
	Aplicación de la descomposición multiplicativa o en cociente de la base, para bases menores que 10
	Potencia de exponente -1, -2 ó -3 de una potencia de 2 ó 5
	De números de dos cifras (exacta)

Raíces cuadradas	Aproximación por defecto y por exceso: de números de tres cifras
	De una fracción con términos de dos cifras (exacta)
	De un número menor que 1, con hasta cuatro cifras decimales
	Aproximación hasta las décimas: de cantidades menores que 10 y hasta dos cifras decimales

7 PROPUESTA DE EJERCICIOS GRADUADOS

A continuación se ofrece una colección de situaciones calculatorias, con la pretensión de que sirva de guía al docente para el desarrollo de capacidades en cálculo mental. Conviene hacer algunas precisiones.

1ª) La clasificación sigue el criterio de «tipo de operación», por tres motivos principales:

a) La verdadera complejidad del cálculo mental se halla ligada -a mi juicio- a dos aspectos:

- **Tamaño de los operandos**, entendiendo por tal su número de cifras en escritura decimal.

- **Mutua relación estructural**, respecto de la operación, y dependiente de ella. Radicalmente diferentes para cada operación aritmética. Serán, por tanto, los que darán también lugar a la generación de diversidad en las estrategias y técnicas, elección del soporte representativo, etc.

b) La ampliación en el dominio numérico (paso a cálculo con decimales o enteros negativos), tanto de «operadores» como del «resultado», supone -por lo general- una *disposición o cambio de registro inicial*. Pero implícita en el enunciado (caso de los operandos) o fácilmente detectable de forma antecedente (para el resultado). Como se indicaba en el Apartado anterior, el cálculo con fracciones entraña una dificultad distinta, relativa al *manejo de registros de memoria*.

c) Se pretende resaltar cómo las estrategias y técnicas del cálculo mental se hallan ligadas a las «propiedades estructurales de cada operación», pudiendo transferirse sin dificultad a medida que se amplía el «dominio de operadores», ya que aquéllas se conservan. En consecuencia: que el cálculo mental no debe restringirse al cálculo con números naturales, tal como ocurre de ordinario en la escuela.

2ª) De acuerdo con el principio de exigir *cálculos inversos o regresivos*, se desdoblan las operaciones en sus dos for-

mas. (Mejor, no designarlas por *composición* y *descomposición*, al ser éstos términos acuñados para estrategias concretas; ver Capítulo 4.)

3ª) Los niveles curriculares se indican en forma abreviada:

EI Educación Infantil

EP1, 2, 3: Ciclo de Educación Primaria

ESO1, 2: nivel de Educación Secundaria Obligatoria.

Son meramente orientativos: refiriéndose al dominio de los números naturales, están sometidos –en principio- a los condicionantes señalados en el Apartado 3.1. No tanto los referentes a características subjetivas de índole madurativo o aptitudinal (recursos de memoria, atención y capacidad de concentración), objeto de intervención pedagógica con el ejercicio del cálculo por sí mismo, como los de índole propiamente curricular:

En la columna «dominio numérico» se indica el correspondiente a términos-operandos y, sobre todo, al resultado de la operación:

- N: naturales (enteros positivos)
- F: fracciones enteras (positivas)
- D: decimales finitos (positivos)
- Z: enteros (positivos y negativos)

Tipo/nivel	EI	EP1	EP2	EP3	ESO1	ESO2	Totales
Conteos	2	2			2		6
Órdenes y conversiones de unidades		1	5	12	2		20
Sumas	1	13	12	7	6		39
Descomposiciones aditivas		9	4	2	2		17
Restas	1	8	6	7	13		35
Descomposiciones sustractivas		6	5	2			13
Multiplicaciones		1	12	21	18	3	55
Descomposiciones en productos		1	3	2	5	2	13
Divisiones			4	14	12	3	33
Descomposiciones en cociente			3	2	1		6
Potencias					12	10	22
Raíces cuadradas					3	6	9
Totales	4	41	54	69	76	24	268

7.1 conteos

Nivel	Dom. Num.	Tipo	Ejemplos	
EI	N	Ascendentes (hasta 31)	1,2,3...	1.1
EI	N	Descendentes (desde 31, máximo)	10,9,8... 22,21,20...	1.2
EP1	N	Ascendentes (sin límite)	18,19,20...	1.3
EP1	N	Descendentes (sin límite en el punto de partida)	90,89,88...	1.4
ESO1	Z	Ascendentes (sin límites)	-9,-8,-7...	1.5
ESO1	Z	Descendentes (sin límites)	5,4...,0,-1,-2...	1.6

Técnicas sugeridas

Para los conteos con números naturales hay que distinguir dos momentos, determinados por el conocimiento de la notación simbólica (lecto-escritura de cifras y números). A partir de él, las operaciones secuenciales (ordenación, comparación, separación, etc.) suelen introducirse como operaciones manipulativas -en alguna forma- sobre material concreto: tira numérica, reloj, calendario, tabla numérica... Puede entonces sugerirse la representación interior de estas situaciones como apoyatura para el recuerdo de la serie numérica.

Análogamente, para el trabajo con números enteros –ya en Secundaria- suele ser muy eficaz el recurso a un concreto imaginado: escalera, recta numérica, etc.

7.2 Órdenes y conversión de unidades

Nivel	Dom. Num.	Tipo	Ejemplos	
EP1	N	En expresiones de hasta cuatro cifras	¿Cuál es la cifra de las decenas en 194?	2.1
EP2	N	En expresiones de hasta seis cifras	¿Cuál es la cifra de las centenas en 123.654?	2.2
EP2	N	Conversión a unidades de orden inferior	¿Cuántas unidades son 3 centenas?	2.3
			¿Cuántas decenas son 30 centenas?	2.4
EP2	N	Conversión a unidades de orden superior	¿Cuántas centenas son 400 decenas?	2.5
			¿Cuántas centenas son 400 unidades?	2.6
EP3	N	Conversión a unidades del SM de orden inferior (m, g, l)	¿Cuántos metros son 3 km.?	2.7
			¿Cuántos milímetros son 30 dm.?	2.8
EP3	N	Conversión a unidades del SM de orden superior (m, g, l)	¿Cuántos metros son 300 cm.?	2.9
			¿Cuántos km. son 10.500 m.?	2.10

EP3	N	Conversión a unidades del SM de orden inferior (m ² , m ³)	¿Cuántas m ² son 8 ha.?	2.11
EP3	N	Conversión a unidades del SM de orden superior (m ² , m ³)	¿Cuántas m ³ son un millón de l?	2.12
EP3	D	En expresiones de hasta tres cifras decimales	¿Cuál es la cifra de las décimas en 54 centésimas	2.13
EP3	D	En expresiones cualesquiera, con hasta tres cifras decimales	¿Cuál es la cifra de las décimas en 54 unidades con 805 milésimas?	2.14
EP3	D	Conversión a unidades de orden inferior	¿Cuántas centésimas son 14 décimas?	2.15
EP3	D	Conversión a unidades de orden superior	¿Cuántas décimas son 3.000 milésimas?	2.16
EP3	D	Reducción a la mayor unidad significativa (supresión de «ceros a la derecha»)	¿Puedes quitarle ceros a 500 milésimas? ¿Enque se queda?	2.17
ESO1	D	Conversión a unidades del SM de orden inferior	¿Cuántos cm. son 3,4 m.?	2.18
ESO1	D	Conversión a unidades del SM de orden superior	¿Cuántos km. son 350 m.?	2.19

Técnicas sugeridas

Las operaciones sobre expresiones numéricas abstractas (sin incorporación de unidades) se ven favorecidas con la representación interior de la correspondiente expresión escrita. Es decir: supuesto que se propone en forma verbal, *traducirla* a lenguaje escrito, aunque tan sólo en su fase imaginativa.

La conversión de unidades en el Sistema Métrico Decimal exige, además, el recurso previo a la presentación de la ordenación/estructura de las correspondientes unidades: *escalera*, *tabla*, etc.; y la aplicación de la *regla de conversión*: *bajar/multiplicar, subir/dividir, por 10 (100, 1.000) cada paso*, etc.

7.3 Sumas

Nivel	Dom. Num.	Tipo	Ejemplo	
EI	N	Con resultado menor o igual a 10	3+5	3.1
EP1	N	Tabla de sumar (del 12)		3.2
EP1	N	Primer sumando de dos cifras y segundo de una, sin cambio de decena	32+6	3.3
EP1	N	Primer sumando de una cifra y segundo de dos, sin cambio de decena	6+32	3.4
EP1	N	Primer sumando de dos cifras y segundo de una, caso general	36+7	3.5
EP1	N	Primer sumando de una cifra y segundo de dos, caso general	7+36	3.6

EP1	N	Progresiones aritméticas crecientes (diferencia menor que 10)	2, 8, 14...	3.7
EP1	N	Sumandos de dos cifras, con resultado menor que 100 y sin cambio de unidades	23+45	3.8
EP1	N	Sumandos de dos cifras, con resultado menor que 100; caso general	37+29	3.9
EP1	N	Primer sumando de tres cifras y segundo de una, sin cambio de decena	124+5	3.10
EP1	N	Primer sumando de una cifra y segundo de tres, sin cambio de decena	5+124	3.11
EP1	N	Primer sumando de tres cifras y segundo de una, caso general	124+8	3.12
EP1	N	Primer sumando de tres cifras y segundo de dos, con resultado menor que 200; sin conversión de unidades	143+35	3.13
EP1	N	Primer sumando de tres cifras y segundo de dos, sin conversión de unidades	352+37	3.14
EP2	N	Sumandos de dos cifras, caso general	68+56	3.15
EP2	N	Progresiones aritméticas crecientes (generales)	3, 17, 31...	3.16
EP2	N	Primer sumando de tres cifras y segundo de dos, con resultado menor que 200; caso general	146+39	3.17
EP2	N	Primer sumando de tres cifras y segundo de dos, sin cambio de decena	425+67	3.18
EP2	N	Primer sumando de tres cifras y segundo de dos, sin conversión de unidades	456+72	3.19
EP2	N	Primer sumando de tres cifras y segundo de dos, caso general	425+185	3.20
EP2	N	Sumandos de tres cifras, sin conversión de unidades	423+321	3.21
EP2	N	Sumandos de tres cifras, sin conversión a centenas	456+237	3.22
EP2	N	Sumandos de tres cifras, con resultado menos que 1.000; caso general	456+389	3.23
EP2	N	Sumandos de tres cifras, caso general	654+787	3.24
EP2	N	Un sumando de cuatro cifras y otro de una	1948+8	3.25
EP2	N	Un sumando de cuatro cifras y otro de dos	1948+19	3.26
EP3	N	Un sumando de cuatro cifras y otro de tres, sin cambio en las unidades de millar	1809+175	3.27
EP3	N	Sumandos de cuatro cifras, sin conversión a unidades de decenas de millar	1357+2468	3.28
EP3	N	Sumandos de cuatro cifras, caso general	7531+8642	3.29
EP3	D	Sumandos con sólo parte decimal de dos cifras de igual orden menor	0,35+0,48	3.30
EP3	D	Sumandos con sólo parte decimal de hasta dos cifras de distinto orden menor	0,5+0,35	3.31
EP3	D	Sumandos con sólo parte decimal de tres cifras de igual orden menor	0,123+0,456	3.32
EP3	D	Sumandos con sólo parte decimal de tres cifras de igual orden menor	0,123+0,456	3.33
EP3	D	Sumandos con parte entera y hasta dos cifras decimales de distinto orden menor	2,34+5,6	3.34
EP3	D	Sumandos con sólo parte decimal de tres cifras, con distinto orden menor	0,45+0,038	3.35

ESO1	F	Fracciones con términos de una cifra	$1/2+3/4$	3.35
ESO1	F	Un entero más una fracción con términos de una cifra	$5+3/4$	3.36
ESO1	Z	Sumandos negativos	$-28+-36$	3.37
ESO1	Z	Un sumando negativo y otro positivo, de hasta dos cifras cada uno	$-36+28$	3.38
ESO1	Z	Progresiones aritméticas crecientes (diferencia menor que 10 en valor absoluto)	$-24, -18, -12...$	3.39

Técnicas sugeridas

3.1.- Representación interior de tira numérica o empleo de dedos.

3.2.- Memorización previa. Repres. Del reloj.

3.3.- $30+(2+6)$, con soporte verbal.

3.4.- $32+6=30+(2+6)$ (prop. Conutativa), con soporte verbal.

3.5.- $30+(6+7)=30+10+3 = 40+3$

3.6.- $36+7=30+(6+7)$ (prop. Conmutativa), con soporte verbal.

3.7.- Convertir en sumas, término a término.

3.8.- $20+40+3+5=60+8$, con soporte verbal.

3.9.- $30+20+(7+9) = 50+16$, con soporte verbal.

3.10.- $120+(4+5) = 120+9$, con soporte verbal.

3.11.- $124+5 = 120+(4+5)$; prop. conmutativa, con soporte verbal.

3.12.- $120+(4+8) = 120+12 = (120+10)+2$

3.13.- $100+40+30+(3+5) = 100+70+8$, con soporte verbal.

3.14.- $300+50+30+(2+7) = 300+80+9$, con soporte verbal.

3.15.- $60+50+(8+6) = 110+14$, con soporte verbal.

3.16.- Reducir a sumas, término a término.

3.17.- $100+40+30+(6+9) = 100+70+15 = 100+85$, con soporte verbal.

3.18.- $400+20+60+(5+7) = 400+80+12=400+92$, con soporte verbal.

3.19.- $400+50+70+(6+2) = 400+120+8 = 400+100+(20+8)$, con soporte verbal.

3.20.- $400+100+(20+80)+(5+5) = 500+100+10$, con soporte verbal.

3.21.- $400+300+(23+21) = 700+20+20+(3+1) = 700+40+4$, con soporte verbal.

3.22.- $400+200+(56+37) = 600+50+30+(6+7) = 600+80+13=600+93$, con soporte verbal.

3.23.- $400+300+(56+89) = 700+50+80+(6+9) = 700+130+15 = 530+15$, sop. verbal

3.24.- $600+700+(54+87) = 1300+50+80+(4+7) = 1300+130+11 = 1430+11$

3.25.- $1900+(48+8)$, con soporte verbal.

3.26.- $1900+(48+19) = 1.900+40+10+(8+9) = 1.900+50+17$

3.27.- $1000+800+100+(9+75) = 1000+900+(75+9)$, con soporte verbal

3.28.- $1000+2000+(300+400)+(57+68) = 3000+700+50+60+(7+8)$

3.29.- $(7000+8000)+(500+600)+(31+42) = 15000+1100+30+40+(1+2)$

- 3.30.- $35+48$ (centésimas), como enteros (¿pasar a escritura?)
- 3.31.- Reducir a unidades del orden menor y sumar como enteros (¿pasar a escritura?)
- 3.32.- $123+456$ (milésimas), como enteros
- 3.33.- $(2+5) + (34+60 \text{ centésimas})$: separar parte entera y decimal, sumando ésta como enteros.
- 3.34.- $450+38$ (milésimas): Reducir a unidades del orden menor, y sumar como enteros
- 3.35.- Reducir a común denominador
- 3.36.- $20/4+3/4$: convertir las unidades en fracción con el mismo denominador
- 3.37.- $-(28+36)$: anticipar resultado negativo, y pasar a contrarios.
- 3.38.- $28-36$: anticipar signo del resultado y convertir en resta de números positivos.
- 3.39.- Convertir en sumas algebraicas, término a término.

7.4 Descomposiciones aditivas

Nivel	Dom. Num.	Tipo	Ejemplos	
EP1	N	Descomposición decimal de números de hasta cuatro cifras	369	4.1
EP1	N	Composición decimal de números de hasta tres cifras	9 unidades, 6 decenas, 3 centenas	4.2
EP1	N	Conversión a unidades de orden inferior (hasta tres órdenes)	¿A cuántas decenas equivalen 17 centenas	4.3
EP1	N	Conversión a unidades de orden superior (hasta tres órdenes)	¿A cuántas centenas equivalen 1.700 decenas	4.4
EP1	N	Descomposición aditiva general de números menores que 20	Sumas que dan como resultado 7	4.5
			Sumas que dan como resultado 12	4.6

EP1	N	Descomposición ad. gen. de números de dos cifras, sin conversión de unidades	Sumas que dan como resultado 36	4.7
EP1	N	Descomposición aditiva gen. de números de dos cifras	Sumas que dan como resultado 36	4.8
EP1	N	Descomposición ad. gen. de números de tres cifras en dos sumandos, sin conversión de unidades	Sumas que dan como resultado 365	4.9
EP2	N	Descomposición decimal de números de hasta seis cifras	204.060	4.10
EP2	N	Composición decimal de números de hasta seis cifras	3 decenas de millar, 6 centenas, 9 unidades	4.11
EP2	N	Descomposición ad. gen. de números de tres cifras en tres sumandos, sin conversión de unidades	Sumas de tres sumandos que dan como resultado 365	4.12
EP2	N	Descomposición ad. gen. de números de tres cifras en tres sumandos	Sumas de tres sumandos que dan como resultado 365	4.13
EP3	D	Descomposición decimal de números de hasta cuatro cifras, con dos decimales	¿Qué unidades de cada orden hay en 3,65?	4.14
EP3	D	Composición decimal de números de hasta cuatro cifras, y hasta tres decimales	2 décimas, 5 centésimas, 2 docenas	4.15
ESO1	D	Descomposición sobre media unidad de orden superior, para un número de hasta tres cifras decimales	Suma de resultado 3,65	4.16
ESO1	D	Descomposición sobre media unidad de dos ordenes superiores, para un número de tres cifras decimales	Suma de resultado 0,965	4.17

Técnicas sugeridas

4.1.- $300+60+9$

4.2.- $300+60+9$: convertir en unidades, reordenar en orden descendente y sumar, o recurso a representación de escritura

4.3.- Representación de escritura

4.4.- Representación de escritura

4.5.- Primer sumando decreciente: $6+1$, $5+2\dots$, $1+6$

4.6.- Primer sumando decreciente: $11+1$, $10+2\dots$, $1+11$

4.7.- Primer sumando decreciente: $35+1$, $34+2\dots$, $30+6$, $6+30\dots$, $1+35$

4.8.- Primer sumando decreciente: $35+1$, $34+2\dots$, $1+35$

4.9.- Mantener valores enteros para las centenas: $300+65$, $360+5$

4.10.- $204.000+60=200.000+4.000+60$, con apoyatura en soporte verbal

4.11.- Ordenar decreciente y representación de escritura

4.12.- Mantener valores enteros para las centenas: $300+65$, $200+165\dots$

4.13.-Mantener unidades: $300+60+5$, $5+60+300\dots$

4.14.-Representación de escritura

4.15.- Ordenar en orden decreciente, y recurso a representación de escritura

4.16.- Conservar parte entera, y tratar la parte decimal como entero: $3,65 = 3 + 65$ centésimas $= 3 + 50+15$ centésimas $= 3,50 +15$ centésimas

4.17.-Tratar como entero; (si es necesario, con representación de escritura): $0,965$ (milésimas) $= 500+465$ (milésimas) $= 0,5+0,465$

7.5 Restas

Nivel	Dom. Num.	Tipo	Ejemplo	
EI	N	Minuendo menor o igual a 10	8-3	5.1
EP1	N	Inversas de la tabla de sumar (del 12)		5.2
EP1	N	Minuendo de dos cifras y sustraendo de una, sin cambio de decena	28-6	5.3
EP1	N	Minuendo de dos cifras y sustraendo de una, caso general	36-8	5.4
EP1	N	Progresiones aritméticas decrecientes (diferencia menor que 10)	61, 55, 49...	5.5
EP1	N	Términos de dos cifras, sin conversión de unidades	48-25	5.6

EP1	N	Términos de dos cifras, caso general	45-28	5.7
EP1	N	Minuendo de tres cifras, y sustraendo de una, sin cambio de decena	136-4	5.8
EP1	N	Minuendo de tres cifras, y sustraendo de una, caso general	236-9	5.9
EP2	N	Progresiones aritméticas decrecientes (generales)	61, 49, 37...	5.10
EP2	N	Minuendo de tres cifras, menor que 200, y sustraendo de dos, sin cambio de centena	135-19	5.11
EP2	N	Minuendo de tres cifras, y sustraendo de dos, sin cambio de centena	365-37	5.12
EP2	N	Minuendo de tres cifras, menor que 200, y sustraendo de dos, caso general	125-48	5.13
EP2	N	Minuendo de tres cifras, y sustraendo de dos, caso general	234-56	5.14
EP2	N	Términos de tres cifras, sin conversión de unidades	654-321	5.15
EP3	N	Términos de tres cifras, caso general	963-468	5.16
EP3	N	Minuendo de cuatro cifras, y sustraendo de dos, sin cambio de decena	1492-37	5.17
EP3	N	Minuendo de cuatro cifras, y sustraendo de dos, caso general	1234-56	5.18
EP3	N	Minuendo de cuatro cifras, y sustraendo de tres, sin cambio en las unidades de millar	1357-246	5.19
EP3	N	Términos de cuatro cifras, sin conversión de unidades	8765-4321	5.20
EP2	N	Términos con sólo parte decimal de dos cifras de igual orden menor	0,75-0,48	5.21
EP2	N	Términos con sólo parte decimal de hasta dos cifras de distinto orden menor	0,5-0,15	5.22
ESO1	N	Minuendo de cuatro cifras, y sustraendo de tres, caso general	1357-864	5.23
ESO1	N	Términos de cuatro cifras, con conversión de un solo orden de unidades	8761-4325	5.24
ESO1	N	Términos de cuatro cifras, con conversión de dos órdenes de unidades	8426-5719	5.25
ESO1	F	De dos fracciones con términos de una cifra	$\frac{3}{4}-\frac{2}{7}$	5.26
ESO1	N	Entre un entero y una fracción con términos de una cifra	$2-\frac{3}{5}$	5.27
ESO1	D	Términos con sólo parte decimal de tres cifras de igual orden menor	0,425-0,075	5.28
ESO1	D	Términos con sólo parte decimal de hasta tres cifras de distinto orden menor	0,8-0,425	5.29
ESO1	D	Términos con parte entera y hasta dos cifras decimales de distinto orden menor, sin conversión de parte entera	4,8-1,45	5.30
ESO1	D	Términos con parte entera y hasta dos cifras decimales de distinto orden menor	3,25-1,5	5.31
ESO1	Z	Minuendo menor que sustraendo, ambos de una cifra	5-8	5.32
ESO1	Z	Minuendo de una cifra, sustraendo de dos	7-26	5.33
ESO1	Z	Progresiones aritméticas decrecientes (diferencia menor que 10)	12, 5, -2...	5.34
ESO1	Z	Minuendo y sustraendo de dos cifras	7-26	5.35

Técnicas sugeridas

5.1.- Representación de *tira numérica* o empleo de dedos

5.2.- Memorización previa; representación del reloj

5.3.- $(20+8)-6 = 20+(8-6)=20+2$, con soporte verbal

5.4.- $(20+10+6)-8 = 20+(16-8)$, con soporte verbal

5.5.- Restas parciales, término a término

5.6.- $(40+8)-(20+5) = (40-20)+(8-5)$, con soporte verbal

5.7.- $(40-20)+(5-8) = 20+5-8 = 25-8$

5.8.- $130+(6-4)$, con soporte verbal

5.9.- $200+(36-9)$, con soporte verbal

5.10.- Reducir a restas parciales, término a término

5.11.- $100+(35-19)$, con soporte verbal

5.12.- $300+(65-37)$, con soporte verbal

5.13.- $(120-40)+(5-8) = 80+5-8 = 85-8$; con soporte verbal

5.14.- $(230-50)+(4-6) = 180+4-6 = 184-6$, con soporte verbal

5.15.- $(600-300)+(54-21) = 300+50-20+(4-1) = 330+3$, con soporte verbal

5.16.- $(900-400)+63-68 = 500+(60-60)+(3-8) = 500+3-8 = 400+103-8 = 400+95$

5.17.- $1400+(92-37)$, con soporte verbal

5.18.- $1000+(234-56) = 1000+(230-50)+(4-6) = 1100+80+4-6 = 1100+84-6$, con soporte verbal

5.19.- $1000+(357-246) = 1000+(300-200)+(57-46) = 1100+57-46$, con soporte verbal

5.20.- $(8000-4000)+(765-321) = 4000+700-300+(65-21)$... con soporte verbal

5.21.- 75-48 (centésimas): operar como enteros; (¿convertir a escritura?)

5.22.- 50-15 (centésimas): reducir al orden menor, y restar como enteros (¿y escritura?)

5.23.- $(1300-800)+(57-64) = 500+57-64 = 500+50-60+(7-4) = 550-60+(7-4)$..., con soporte verbal

5.24.- $8000-4000+(761-325) = 4000+700-300+(61-25) = 4400+60-20+(1-5) = 4400+41-5$...

5.25.- $8000-5000+(426-719) = 3000+400-700+... 3400-700+... = 2700+(26-19)$, con sop. verbal

5.26.- Reducir a común denominador

5.27.- $10/5-3/5$: reducir el entero a fracción

5.28.- 425-75 (milésimas): tratar como enteros (¿con paso a escritura?)

5.29.- 800-425 (milésimas): reducir al orden menor, y restar como enteros

5.30.- $4-1 + (0,8-0,45) = 3 + (80-45\text{centésimas})$: operar por separado parte entera y parte decimal; ésta, como enteros, tras reducir al orden menor.

5.31.- $3-1 + (0,25-0,5) = 2 + (25-50\text{ centésimas}) = 225-50\text{ centésimas}$: operar por separado parte entera y parte decimal; ésta, como enteros, tras reducir al orden menor, con conversión de unidades enteras, si es preciso.

5.32.- Representación de *escalera* o *tira numérica*; o: determinar signo, y convertir en resta de positivos: $-(8-5)$

5.33.- $-(26-7)$: determinar signo y convertir en resta de positivos

5.34.- Reducir a restas parciales, término a término

5.35.- $-(86-25)$: determinar signo y convertir en resta de positivos

7.6 Descomposiciones sustractivas

Nivel	Dom. Num.	Tipo	Ejemplos	
EP1	N	Descomposiciones sustractivas para un número menor que 10, con minuendo menor que 20	Restas que dan como resultado 8	6.1
EP1	N	Descomposiciones sustractivas para un número menor que 10	Restas que dan como resultado 8	6.2
EP1	N	Descomposición para un número de dos cifras, con minuendo en la decena inmediata superior	Restas que dan como resultado 26	6.3
EP1	N	Descomposición para un número de dos cifras, con sustraendo en decenas	Restas que dan como resultado 26, restando decenas	6.4
EP1	N	Descomposición para un número de dos cifras, con minuendo en decenas	Restas de decenas que dan como resultado 26	6.5
EP1	N	Descomposición para un número de tres cifras, con minuendo en la decena inmediata superior	Restas de decenas que dan como resultado 123	6.6
EP2	N	Descomposición para un número de dos cifras, caso general	Restas que dan como resultado 26	6.7
EP2	N	Descomposición para un número de tres cifras en tres términos, dos de ellos sustraendos	Dos restas sucesivas que dan como resultado 123	6.8
EP2	N	Descomposición para un número de tres cifras en tres términos, sólo uno de ellos sustraendo	Suma y resta sucesivas que dan como resultado 123	6.9
EP2	N	Descomposición para un número de tres cifras, con minuendo en la centena inmediata superior	Resta de 200 que da como resultado 123	6.10
EP2	N	Descomposición para un número de tres cifras, con 1.000 como minuendo	Resta de 1.000 que da como resultado 123	6.11
EP3	F	Complemento a la unidad, para una fracción de términos de una cifra	Resta de 1 que da como resultado $\frac{3}{5}$	6.12
EP3	F	Complemento a la unidad, para una fracción de términos de dos cifras	Resta de 1 que da como resultado $\frac{13}{25}$	6.13

Técnicas sugeridas

- 6.1.- Minuendo creciente: 9-1, 10-2, 11-3...
- 6.2.- Sustraendo múltiplo de 10: 18-10, 28-20...
- 6.3.- Minuendo creciente: 30-4, 31-5, 32-6...
- 6.4.- Minuendo creciente: 36-10, 46-20, 56-30...
- 6.5.- Minuendo creciente: 30-4, 40-14, 50-24...
- 6.6.- 120 => 130: 130-7, con soporte verbal
- 6.7.- Minuendo creciente: 27-1, 28-2...
- 6.8.- 120 => 130: 130-5-2, con soporte verbal
- 6.9.- 100+30-7, 120+5-2; con soporte verbal
- 6.10.- $200-100+23 = 200-70-30+23 = 200-70-7 = 200-77$
- 6.11.- $1000-900+23 = 1000-800-100+23 = 1000-800-100+20+3 = 1000-877...$
- 6.12.- $5/5-3/5 = (5-3)/5$ Restar denominador y numerador; o: convertir la unidad en fracción de igual denominador
- 6.13.- $25/25-13/25 = (25-13)/25$: restar denominador y numerador; o: reducir la unidad a fracción de igual denominador

7.7 Multiplicaciones

Nivel	Dom. Num.	Tipo	Ejemplos	
EP1	N	Tablas del 1, 2, 5, y 10		7.1
EP2	N	Tabla de multiplicar (del 12)		7.2
EP2	N	Un número de dos cifras, por una potencia de 10	23x100	7.3
EP2	N	Un múltiplo de 10 de dos cifras, por un número de una cifra	70x8	7.4
EP2	N	Un múltiplo de 10 de dos cifras, por un número de una cifra	70x8	7.4

EP2	N	Un factor de una cifra y otro de dos, múltiplo de 10	6x90	7.5
EP2	N	Un factor de dos cifras y otro de una, sin conversión de unidades	23x3	7.6
EP2	N	Un factor de dos cifras y otro de una, con resultado menor que 100, caso general	23x4	7.7
EP2	N	Un factor de dos cifras y otro de una, con resultado menor que 200	36x4	7.8
EP2	N	Aproximación: un factor de dos cifras y otro de una, caso general	84x7	7.9
EP2	N	Un factor de dos cifras y otro de una, caso general	84x7	7.10
EP2	N	Un factor de una cifra y otro de tres, múltiplo de 10, y resultado menor que 1.000	3x240	7.11
EP2	N	Aproximación: un factor de tres cifras y otro de una, con resultado menor que 1.000	137x6	7.12
EP2	N	Factores de dos cifras, múltiplos de 10	30x80	7.13
EP3	N	Un número de hasta cuatro cifras por una potencia de 10	721x100	7.14
			8721x100	7.15
EP3	N	Un factor de tres cifras y otro de una, sin conversión a centenas	128x3	7.16
EP3	N	Un factor de tres cifras y otro de una, con resultado menor que 1.000	179x4	7.17
EP3	N	Progresiones geométricas (crecientes) de razón menor que 10	2, 6, 18, 54...	7.18
EP3	N	Aproximación: factores de dos con resultado menor que 1.000	32x27	7.19
EP3	N	Factores de dos cifras, simétricos respecto de un múltiplo de 5	43x47	7.20
EP3	N	Factores de hasta dos cifras, uno de ellos factorizable	14x53	7.21
EP3	N	Cuadrado de un número de dos cifras	53x53	7.22
			59x59	7.23
EP3	N	Hallar múltiplos de un número menor que 10 (hasta 200)	Múltiplos de 6	7.24
EP3	N	Hallar múltiplos de un número de dos cifras (hasta 300)	Múltiplos de 16	7.25
EP3	F	Hallar fracciones equivalentes a una dada, con términos de una cifra	Equivalentes a $\frac{3}{7}$	7.26
EP3	F	Hallar fracciones equivalentes a una dada, con términos de hasta dos cifras	Equivalentes a $\frac{12}{28}$	7.27

EP3	F	Reducir a común denominador fracciones con términos de un cifra	Igual denominador para $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$	7.28
EP3	F	Reducir a común denominador fracciones con términos de hasta dos cifras	Igual denominador para $\frac{11}{12}$ y $\frac{5}{14}$	7.29
EP3	F	Factores fracciones con términos de una cifra	$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$	7.30
EP3	F	De un entero por una fracción con términos de una cifra	$3 \times \frac{4}{5}$	7.31
EP3	D	Un factor decimal menor que 1 por una potencia de 10	$0,125 \times 1000$	7.32
EP3	D	Un factor de hasta cinco cifras, y hasta tres de ellas decimales, por una potencia de 10	$123,45 \times 1000$	7.33
EP3	D	Un factor con hasta dos cifras decimales por un entero menor que 10	$3,25 \times 6$	7.34
ESO1	N	Factores de dos cifras y decenas consecutivas, simétricos respecto de la decena	62×58	7.35
ESO1	N	Un número de dos cifras, por 25	27×25	7.36
ESO1	N	Factores de dos cifras, uno de ellos múltiplo de 5	36×15	7.37
ESO1	N	Factores de dos cifras, caso general	36×52	7.38
			36×59	7.39
			36×54	7.40
ESO1	F	Hallar fracciones decimales equivalentes a una dada con términos de un cifra	Pasar $\frac{3}{4}$ a forma decimal	7.41
ESO1	F	Hallar fracciones decimales equivalentes a una dada con términos de hasta dos cifras	Pasar $\frac{13}{40}$ a forma decimal	7.42
ESO1	D	Aproximación al orden inmediato superior: de un número con hasta tres cifras decimales por un entero menor que 10	$2,345 \times 8$	7.43
ESO1	D	Un número con hasta dos cifras decimales por 25	$3,45 \times 25$	7.44
ESO1	D	Aproximación a las centésimas factores menores que 1, con hasta dos cifras decimales	$0,75 \times 0,64$	7.45
ESO1	D	Factores menores que 1, con hasta dos cifras decimales	$0,75 \times 0,6$	7.46
ESO1	D	Aproximación a la parte entera: factores con parte entera y hasta dos cifras decimales	$3,45 \times 6,7$	7.47
ESO1	D	Porcentaje menor del 10% de un número menor que 100	5% de 68	7.48
ESO1	D	Porcentaje menor del 10% de un número menor que 1.000	4% de 185	7.49
ESO1	D	Porcentaje menor del 100% de un número menor que 100	15% de 82	7.50
ESO1	Z	Factores negativos de dos cifras	$(-35) \times (-48)$	7.51

ESO1	Z	Un factor positivo y otro negativo, menores que 100 en valor absoluto	$(-35) \times (+48)$	7.52
ESO2	N	Mínimo común múltiplo de un número de una cifra y otro de dos	Mínimo común múltiplo (8, 42)	7.53
ESO2	N	Mínimo común múltiplo de dos números (m.c.m. menor que 200)	Mínimo común múltiplo (32, 44)	7.54
ESO2	D	Aproximación a la parte entera: porcentaje de un número menor que 1.000	16% de 275	7.55

Técnicas sugeridas

7.1.- Permutar a primer factor mayor; representación de cuadro numérico

7.2.- Memorización previa; Permutar a primer factor mayor

7.3.- Representación De escritura

7.4.- $7 \times 10 \times 8 = (7 \times 8) \times 10$, con soporte verbal

7.5.- $6 \times 9 \times 10 = (6 \times 9) \times 10$, con soporte verbal

7.6.- $(20+3) \times 3 = (20 \times 3) + (3 \times 3) = 60+9$, con soporte verbal

7.7.- $(20+3) \times 4 = (20 \times 4) + (3 \times 4) = 80 + (3 \times 4) = 60+12$, con soporte verbal

7.8.- $(30+6) \times 4 = (30 \times 4) + (6 \times 4) = 120 + (6 \times 4)$, con soporte verbal

7.9.- $80 \times 7 + \dots, 560 + (4 \times 7) = 560 + 20 + \dots$, con soporte verbal

7.10.- $(80+4) \times 7 = 80 \times 7 + (4 \times 7) = 560 + 28$, con soporte verbal

7.11.- $3 \times 200 + (3 \times 40) = 600 + (3 \times 40) = 600 + 120 = 600 + 100 + 20$, con soporte verbal

7.12.- $(100+37) \times 6 = 100 \times 6 + (37 \times 6) = 600 + (30+7) \times 6 = 600 + 30 \times 6 + (7 \times 6) = 600 + 180 + 42 \dots$, con soporte verbal

7.13.- $(3 \times 10)(8 \times 10) = 3 \times 8 \times (10 \times 10) = 24 \times 100$, con soporte de escritura

7.14.- Representación de escritura

7.15.- $(8.000 + 721) \times 100 = 800.000 + 721 \times 100$ (por representación de escritura)

7.16.- $100 \times 3 + (28 \times 3) = 300 + (20 + 8) \times 3 = 300 + 20 \times 3 + (8 \times 3) = 300 + 60 + (20 \times 4) \dots$, con soporte verbal

7.17.- $(100 \times 4) + (79 \times 4) = 400 + (70 + 9) \times 4 = 400 + 70 \times 4 + (9 \times 4) = 400 + 280 + (9 \times 4) = 680 + 36 \dots$, con soporte verbal

7.18.- Reducir a productos parciales, término a término

7.19.- $(30 + 2) \times (20 + 7) = 30 \times 20 + (30 \times 7) + \dots = 600 + (30 \times 7) + \dots = 600 + 210 + \dots + (2 \times 20) \dots$

7.20.- $4 \times (4 + 1) \times (3 \times 7) = 2021$, según regla singular

7.21.- $53 \times (2 \times 7) = 53 \times 2 \times 7 = 106 \times 7$

7.22.- $(50 + 3)^2 = 50 \times 50 + (2 \times 50 \times 3) + (3 \times 3)$, por fórmula singular

7.23.- $(60 - 1)^2 = 60 \times 60 - (2 \times 60 \times 1) + (1 \times 1)$, por fórmula singular

7.24.- Reducir a sumas parciales, múltiplo a múltiplo

7.25.- Reducir a sumas parciales, término a término

7.26.- Multiplicar/dividir ambos términos por el mismo número

7.27.- Multiplicar/dividir ambos términos por el mismo número

7.28.- Buscar múltiplos del mayor, que también lo sean del menor: 4, 8, 12

7.29.- Buscar múltiplos del mayor, que también lo sean del menor: 14, 28, 42..., 84

7.30.- $2 \times 4 / (3 \times 5)$: regla de la multiplicación de fracciones

7.31.- $(3 \times 4) / 5$: Aplicación de la regla propia

7.32.- Representación de escritura

7.33.- Representación de escritura

7.34.- $3 \times 6 + (6 \times 0,25) = 18 + 6 \times 25$ centésimas)...: separar parte entera de decimal, operando ésta como enteros; en su caso: representación de escritura

7.35.- $(60+2) \times (60-2) = (60 \times 60) - (2 \times 2) = 6 \times 6 \times 100 - (2 \times 2) = 3600 - 4$, por fórmula singular

7.36.- $27 \times (100/4) = (27 \times 100) / 4 = 2700 / 4 \dots$

7.37.- $36 \times (30/2) = (36 \times 3 \times 10) / 2$

7.38.- $36 \times (50+2) = 36 \times 50 + (36 \times 2) = 36 \times 5 \times 10 + (36 \times 2)$

7.39.- $36 \times (60-1) = 36 \times 60 - (36 \times 1) = 36 \times 6 \times 10 - (36 \times 1)$

7.40.- $36 \times (50+4) = 36 \times 5 \times 10 + (36 \times 4)$

7.41.- Buscar múltiplos del denominador potencias de 10; en su defecto, efectuar la división

7.42.- Buscar múltiplos del denominador potencias de 10; en su defecto, efectuar la división

7.43.- $2 \times 8 + \dots = 16 + (8 \times 3 \text{ décimas}) + \dots = 16 + 2,4 + \dots$: acumlar productos parciales, por órdenes decrecientes de unidades

7.44.- $3,45 \times (100/4) = (\text{repres. Escrit.}) (3,25 \times 10) / 4$

7.45.- $(7 \text{ décimas} + 5 \text{ centésimas}) \times (6 \text{ décimas} + 4 \text{ centésimas}) = 7 \times 6 \text{ centésimas} + (4 \times 4 + 5 \times 6 \text{ milésimas}) + \dots$

7.46.- 75x6 milésimas: tratar como enteros, con determinación previa de orden del resultado (¿con representación de escritura?)

7.47.- $3 \times 6 + (3 \times 0,7) + (6 \times 0,45) + \dots$: descomponer en parte entera y decimal, y tratar como producto de sumas

7.48.- $(5 \times 68) / 100 = 340 / 100$, con soporte en escritura

7.49.- $(4 \times 185) / 100 = 740 / 100$, con representación de escritura

7.50.- $(15 \times 82) / 100 = 1230 / 100$, con representación de escritura

7.51.- Regla de los signos y operar como números positivos

7.52.- Regla de los signos y operar como números positivos

7.53.- Probar múltiplos sucesivos del mayor: 42, 84, 126, 168

7.54.- Comparar múltiplos sucesivos de ambos: 64 y 88, 96, 128, 132...

7.55.- 16×275 centésimas = $275 \times 10 + (275 \times 6)$ centésimas, y recurso a representación de escritura

7.8 Descomposiciones en productos

Nivel	Dom. Num.	Tipo	Ejemplos	
EP1	N	Para múltiplos de 2, 5, y 10	Multiplicaciones que den 20	8.1
EP2	N	Inversas de la tabla de multiplicar (del 10)		8.2
EP2	N	Para múltiplos de 4, 8, y 25, menores o iguales a 100	Multiplicaciones que den 72	8.3
EP2	N	Para números menores o iguales a 100	Multiplicaciones que den 72	8.4
EP3	N	Cálculo de los divisores de un número de dos cifras	Hallar todos los divisores de 84	8.5

EP3	N	Descomposición en factores primos de números de dos cifras	Descomponer 84 en factores primos	8.6
ESO1	N	Aplicación de los criterios de divisibilidad para números de dos cifras	¿Por qué números se puede dividir 72? (división exacta)	8.7
ESO1	N	Aplicación de los criterios de divisibilidad para números menores que 300	¿Por qué números se puede dividir 264? (división exacta)	8.8
ESO1	D	Para números menores que 1, con parte decimal múltiplo de 5	Multiplicaciones que den 0,75	8.9
ESO1	D	Para números de hasta cuatro cifras, con parte decimal múltiplo de 5	Multiplicaciones que den 8,25	8.10
ESO1	D	Para números de hasta cuatro cifras, con parte decimal múltiplo de 25	Multiplicaciones que den 12,75	8.11
ESO2	N	Mínimo común divisor de dos números de dos cifras	Mínimo común múltiplo (56,62)	8.12
			Mínimo común múltiplo (56,92)	8.13

Técnicas sugeridas

8.1.- Primer factor creciente, y permutando: 2×10 , 10×2 , 4×5 ,

8.2.- Memorización previa

8.3.- Primer factor creciente, y permutando: 2×36 , 36×2 , 4×18 , 18×4 ...

8.4.- Primer factor creciente, y permutando: 2×36 , 36×2 , 4×18 , 18×4 ...

8.5.- 2, 42, 4, 21,...: aplicar criterios de divisibilidad y productos cruzados, de forma creciente

8.6.- 1, 2 ($\times 42$, 21), 3 (7), 7: reducción sucesiva según Divisores comunes crecientes, por criterios de divisibilidad

8.7.- 1, 72, 2, 36....: aplicar criterios, y productos cruzados

8.8.- 1, 264, 2, 132, 3, 88....: aplicar criterios, y productos cruzados

8.9.- Conversión a: "multiplicaciones que den 75 centésimas"

8.10.- Conversión a: “multiplicaciones que den 825 centésimas”

8.11.- Conversión a: “multiplicaciones que den 1225 centésimas”

8.12.- Método de Euclides: $\text{Mcd}(56, 62-56) = \text{mcd}(56, 6) = \text{mcd}(6, 2) = 2$

8.13.- Reducción sucesiva según divisores comunes crecientes, por crit. de div.: (56, 92), (28, 46), (14, 23)

7.9 Divisiones

Nivel	Dom. Num.	Tipo	Ejemplos	
EP2	N	Dividendo menor o igual a 20	12:3	9.1
EP2	N	Inversas de la tabla de multiplicar (del 12)		9.2
EP2	N	Aproximación a la parte entera: dividendo de dos cifras y divisor de una	39:7	9.3
EP2	N	Resto para dividendo de dos cifras y divisor de una	Resto de 39:7	9.4
EP3	N	Dividendo de dos cifras y divisor de una (exacta)	84:6	9.5
EP3	N	Aproximación: dividendo de dos cifras	90:13	9.6
EP3	N	Dividendo y divisor de dos cifras	84:12	9.7
EP3	N	Aproximación: por 10, para dividendo de tres cifras	654:10	9.8
EP3	N	Aproximación: dividendo de tres cifras y divisor de una	456:6	9.9
EP3	N	Por 5, para dividendo de tres cifras	265:5	9.10
EP3	N	Dividendo de tres cifras y divisor de una (exacta)	456:6	9.11
EP3	N	Resto para dividendo de tres cifras y divisor de una	650:8	9.12
EP3	N	Resto para dividendo y divisor de dos cifras	90:12	9.13
EP3	F	Simplificación sucesiva de fracciones con términos de dos cifras	24/84	9.14
EP3	F	Simplificaciones parciales de fracciones con un término de dos cifras y otro de tres	48/256	9.15
EP3	D	Un número entero entre una potencia de 10 mayor que el	27:10 ⁴	9.16

EP3	D	Un número de hasta cinco cifras, y hasta dos de ellas decimales, entre una potencia de 10	$23,45:10^3$	9.17
EP3	D	Expresar en forma decimal una fracción con términos de una cifra	Pasar a decimal $3/4$	9.18
ESO1	N	Progresiones geométricas (decrecientes) de razón inversa de un número menor que 10 (exactas)	243, 81, 27...	9.19
ESO1	N	Dividendo de tres cifras y divisor factorizable de dos	$294:14$	9.20
ESO1	F	Fracción irreducible equivalente a otra dada, con términos de dos cifras	$24/84$	9.21
ESO1	F	Cociente de fracciones con términos de una cifra	$2/3:4/5$	9.22
ESO1	F	Una fracción con términos de una cifra entre un entero	$1/4:3$	9.23
ESO1	F	Un entero entre una fracción con términos de una cifra	$3:2/5$	9.24
ESO1	D	Expresar en forma decimal una fracción con denominador de hasta dos cifras	Pasar a decimal $15/16$	9.25
ESO1	D	Un número menor que 1 entre un entero menor que 10	$0,75:3$	9.26
ESO1	D	Un número mayor que 1, con parte decimal de hasta dos cifras, entre un entero menor que 10	$3,45:3$	9.27
ESO1	D	Un número mayor que 1, con parte decimal de hasta dos cifras, entre 25	$3,75:25$	9.28
ESO1	Z	Dividendo de tres cifras y divisor de una, ambos negativos	$(-212):4$	9.29
ESO1	Z	Dividendo de tres cifras y divisor de una, de signo contrario	$(-324):6$	9.30
ESO2	D	Un número menor que 1, con hasta dos cifras decimales, entre 0,5	$0,85:0,5$	9.31
ESO2	D	Un número menor que 1, con hasta dos cifras decimales, entre 0,25	$0,65:0,25$	9.32
ESO2	D	0,5 entre un número menor que 1, con hasta dos cifras decimales	$0,5:0,45$	9.33

Técnicas sugeridas

9.1.- Evocación de tabla; o, por alcance, sucesión de múltiplos del divisor

9.2.- Memorización previa

9.3.- Por alcance, mediante múltiplos sucesivos del divisor

9.4.- Por alcance, mediante múltiplos sucesivos del divisor, y diferencia al dividendo

9.5.- Por alcance: $84 = 60 + 24 = 6 \times 10 + 24 = 10 + 24 : 6 = 10 + 4$

9.6.- Por alcance: $90 = 13 \times 5 + \dots = 5 + (90 - 65) : 13 = 5 + 25 : 13 = 5 + 1 + \dots = 6 + \dots$

9.7.- Por alcance: $84 = 60 + 24 = 12 \times 5 + 24 = 12 \times 5 + (12 \times 2) = (5 + 2) \times 12$

9.8.- Representación de escritura: $654 : 10 = 65 + \dots$

9.9.- Representación del algoritmo escrito simplificado de división por una cifra

9.10.- Representación del algoritmo escrito simplificado de división por una cifra

9.11.- Representación del algoritmo escrito simplificado de división por una cifra

9.12.- Representación del algoritmo escrito simplificado de división por una cifra

9.13.- Por alcance mediante múltiplos del divisor: $90 = 12 \times 5 + \dots$ $60 + 30 = 12 \times 5$ $12 \times 2 + \dots$

9.14.- Aplicar criterios de divisibilidad común para ambos términos: $24/84 = 12/42 = 6/21 = 2/4$

9.15.- Aplicar criterios de divisibilidad común para ambos términos: $48/256 = 24/128 = 12/64 = 3/16$

9.16.- Regla sobre representación de escritura (desplazamiento de la coma)

9.17.- Regla de desplazamiento de la coma, sobre representación de escritura

- 9.18.- Representación del algoritmo escrito simplificado
- 9.19.- Divisiones parciales, término a término
- 9.20.- $294L(2 \times 7) = (294:2):7 = 147:7 \dots$ (con soporte en algoritmo escrito para divisor de una cifra)
- 9.21.- Simplificación sucesiva, empleando criterios de divisibilidad: $24/84 = 12/42 = 6/21 = 2/7$
- 9.22.- Convertir en multiplicación por el inverso: $2/3 \times 5/4$
- 9.23.- $1/(4 \times 3)$; Aplicación a caso particular
- 9.24.- Convertir en multiplicación por inverso: $3 \times 5/2 = (3 \times 5)/2$
- 9.25.- Representación del algoritmo escrito simplificado
- 9.26.- 75:3 centésimas: operar como enteros (¿pasar a escritura?)
- 9.27.- 345:3 centésimas: operar como enteros (¿pasar a escritura?)
- 9.28.- $325 \times 4:100$ centésimas: operar como enteros (¿pasar a escritura?)
- 9.29.- Aplicar *regla de los signos* y operar como números positivos: $212:4$
- 9.30.- Aplicar *regla de los signos* y operar como números positivos: $324:6$
- 9.31.- 85×2 centésimas: operar como enteros (¿pasar a escritura?)
- 9.32.- 65×4 centésimas: operar como enteros (¿pasar a escritura?)
- 9.33.- $100L45 \times 2$: operar como enteros (¿pasar a escritura?)

7.10 Descomposiciones en cociente

Nivel	Dom. Num.	Tipo	Ejemplos	
EP2	N	Para números de una cifra, con dividendo menor que 30	Divisiones que den 6, con dividendo menor que 30	10.1
EP2	N	Para múltiplos de 2, 4, y 5 menores que 100	Divisiones que den 16, con dividendo menor que 100	10.2
EP2	N	Para 8, 12, y 25 con dividendo menor que 100	Divisiones que den 24, con dividendo menor que 100	10.3
EP3	D	Conversión en fracción entera de un número menor que 1, de hasta con tres cifras decimales	Expresar 0,215 como fracción	10.4
EP3	D	Conversión en fracción entera de un número mayor que 1, y hasta con dos cifras decimales	Expresar 2,25 como fracción	10.5
ESO1	N	Aplicación de los criterios de divisibilidad para números de hasta tres cifras	¿Por qué número es divisible 234?	10.6

Técnicas sugeridas

- 10.1.- Múltiplos crecientes de 6: 6:6, 12:6, 18:6
- 10.2.- Múltiplos crecientes de 16: 16:16, 32:16, 48:16...
- 10.3.- Múltiplos crecientes de 24: 24:24, 48:24, 72:24...
- 10.4.- Recurso a *lectura correcta*
- 10.5.- Representación de escritura
- 10.6.- Representación de escritura

7.11 Potencias

Nivel	Dom. Num.	Tipo	Ejemplos	
ESO1	N	Cuadrados de números menores que 20	12 ²	11.1
ESO1	N	Cuadrados de múltiplos de 5 de dos cifras	40 ²	11.2
			45 ²	11.3
ESO1	N	Cubos de números menores que 10	6 ³	11.4
ESO1	F	Cuadrado de una fracción con términos de una cifra	(3/5) ²	11.5
ESO1	F	Cuadrado de una fracción con términos menores que 30	(13/25) ²	11.6
ESO1	F	Cubo de una fracción con términos de una cifra	(3/5) ³	11.7

ESO1	D	Equivalencia con potencias negativas de 10	¿A cuánto equivale 10^{-3} ?	11.8
ESO1	D	Cuadrado de un número de hasta dos cifras, con al menos una de ellas decimal	$1,5^2$	11.9
ESO1	D	Cubo de un número menor que 1 con sólo una cifra decimal	$0,6^3$	11.10
ESO1	Z	Cuadrados de base entera menor que 20 en valor absoluto	$(-15)^2$	11.11
ESO1	Z	Cubos de base entera menor que 10 en valor absoluto	$(-6)^3$	11.12
ESO2	N	Cuadrados de números de dos cifras, con cifra de las unidades menores que 5	43^2	11.13
ESO2	N	Cuadrados de números de dos cifras, con cifra de las unidades mayor que 5	47^2	11.14
ESO2	N	Potencias de 2, hasta 2^{16}	2^{10}	11.15
			2^8	11.16
ESO2	N	Aproximación (hasta la unidad de orden superior) de potencias de base y exponente menores que 10	5^6	11.17
ESO2	N	Aplicación de la descomposición aditiva del exponente, para bases menores que 10	4^5	11.18
ESO2	N	Aplicación de la descomposición multiplicativa o sustractiva del exponente, para bases menores que 10	4^6	11.19
ESO2	N	Aplicación de la descomposición multiplicativa o en cociente de la base, para bases menores que 10	14^3	11.20
			15^3	11.21
ESO2	Z	Potencia de exponente -1,-2, ó -3 de una potencia de 2 ó 5	2^{-3}	11.22

Técnicas sugeridas

11.1.- Memorizar; recurso a productos

11.2.- $4 \times 4 \times (10 \times 10)$

11.3.- $4 \times (4+1) \times 100 + 25 = 20_25$: según fórmula singular

11.4.- $6^2 \times 6$, con soporte verbal

11.5.- $3^2/5^2$: aplicar regla

11.6.- $13^2/25^2$: aplicar regla

11.7.- $3^3/5^3$: aplicar regla

11.8.- Convertir en fracción entera: $1/1000$

11.9.- Convertir en fracción entera: $(15/10)^2 = 15^2/100$

11.10.- Convertir en fracción entera: $(6/10)^3 = 6^3/1000$

11.11.- Aplicar *regla de signos* y operar como números positivos

11.12.- Aplicar *regla de signos* (signo de la base) y operar como números positivos

11.13.- $(40+3)^2 = 40^2+2\times3\times40+3^2 = 16\times100+2\times3\times40+9$

11.14.- $(50-3)^2 = 50^2-2\times3\times50+3^2 = 25\times100-2\times3\times50+9$

11.15.- Memorizar: 1024; representación de escritura

11.16.- Productos sucesivos o divisiones sobre $2^{10}=1024$, y soporte representación de escritura

11.17.- Productos sucesivos aproximados, con soporte en representación de escritura

11.18.- $4^{3+2} = 64\times16$

11.19.- $4^{3\times2} = (4^3)^2 = 64^2$

11.20.- $(7\times2)^3 = 7^3\times2^3 =343\times8$

11.21.- $(30:2)^3 = 30^3:2^3$

11.22.- Aplicar *regla de equivalencia de exponentes negativos*: $1/(2^3)$

7.12 Raíces cuadradas

Nivel	Dom. Num.	Tipo	Ejemplos	
ESO1	N	De números de dos cifras (exacta)	$\sqrt{64}$	12.1
ESO1	N	Aproximación por defecto y por exceso: de números de dos cifras	$\sqrt{71}$	12.2
ESO1	F	De una fracción con términos de dos cifras (exacta)	$\sqrt{49/81}$	12.3
ESO2	N	Aproximación de números de tres cifras	$\sqrt{468}$	12.4

ESO2	D	De un número menor que 1, con hasta dos cifras decimales	$\sqrt{0,79}$	12.5
ESO2	D	De un número menor que 1, con hasta cuatro cifras decimales	$\sqrt{0,079}$	12.6
ESO2	D	De un número menor que 10, con hasta dos cifras decimales	$\sqrt{7,53}$	12.7
ESO2	D	Aproximación hasta las décimas, de cantidades menores que 10 y hasta dos cifras decimales	$\sqrt{7,53}$	12.8
ESO2	Z	Ambas raíces cuadradas exactas de números menores que 100	$\pm\sqrt{49}$	12.9

Técnicas sugeridas

12.1.- Recurso a lista memorizada de cuadrados

12.2.- Sucesión creciente de cuadrados

12.3.- Aplicar *regla*, y recurso a sucesión creciente de cuadrados

12.4.- Aproximación creciente: decenas, unidades al 5, y aproximación entre éste y la decena inmediata...

12.5.- Considerarlo como fracción de centésimas:
 $\sqrt{79/100} = \sqrt{79}/\sqrt{100} = 8,8.../10 = 0,88...$

12.6.- Considerarlo como fracción de diezmilésimas:
 $\sqrt{790/10000} = \sqrt{790}/\sqrt{10000} = 28,1.../100 = 0,281...$

12.7.- Reducirlo a centésimas, con resultado en décimas, y operar con enteros

12.8.- Reducirlo a centésimas, con resultado en décimas, y operar con enteros

12.9.- Aplicar *regla* al resultado natural

8. PEQUEÑA LUDOTECA

A título ilustrativo, y con la esperanza de que sirva de sugerencia a profesores y padres, se ha recogido aquí una serie de juegos-tipo sencillos de llevar a la práctica con estudiantes ciegos o deficientes visuales. En verdad, no se trata de juegos adaptados, sino de juegos adecuados y de aplicación inmediata.

El criterio de selección ha sido bien simple: facilidad de puesta en práctica. De alguna forma que no precisaran de materiales o piezas especiales, o que exigieran algún tipo de adaptación por falta de visión suficiente.

Así pues, no se encontrará ninguno de la variadísima gama de *juegos de ordenador* o *play-station*. Tampoco de los que precisan tablero o fichas escritas. Y bien a mi pesar, pues muchos de ellos favorecen el desarrollo de otras capacidades: lectura de cantidades y expresiones matemáticas, exploración háptica o visual, globalización de situaciones espaciales o de estados del juego, diseño de estrategias de ataque-defensa... Como se indicaba al final del Capítulo 3, se carece de *software* accesible, y la adaptación o producción de materiales implica dedicación de tiempo y medios no siempre disponibles.

Se han evitado también los juegos que tan sólo emplean dados. Un dado parlante¹ podría sustituir en buena medida un dado ordinario, dos o tres, por lanzamientos sucesivos (aunque no siempre...) Las fichas de dominó o los naipes de la baraja española, mucho más corrientes, pueden utilizarse también como elementos generadores de azar, con valores numéricos muy variados.

Al entender que también deben y pueden cultivarse destrezas matemáticas previas al cálculo en sí mismo, se incluye un pequeño grupo destinado al ejercicio y desarrollo de capacidades de representación interior, expresivas y de

¹ *Dado parlante*: ver catálogo del CIDAT, Centro de Investigación y Desarrollo de Ayudas Tiflotécnicas; ONCE-Madrid.

memoria numérica. Algunos, que serían ramplones ejercicios combinatorios con lápiz y papel, al tener que realizarlos sin su auxilio, se tornan ocasión para el desarrollo de capacidades útiles en cálculo mental.

Las anotaciones de puntos o números de cualquier tipo no será preciso escribirlas. Sin embargo, a pesar de esta voluntad de subrayar la completa autonomía inmaterial de los juegos, la utilización de instrumentos de escritura y otros elementos auxiliares (fichas, botones, legumbres, etc.) contribuye a darles variedad.

Cuando en alguno de los enunciados o sus variantes se haga referencia a *paréntesis*, debe entenderse que serían *paréntesis matemáticos*, no los *paréntesis auxiliares braille*, exigidos al intentar plasmar por escrito la cadena de operaciones propuesta.

De las variantes

Los juegos-ejercicio se presentan, por lo general, enunciados con unos *parámetros iniciales*. Basta modificar éstos, para obtener variantes del mismo juego que alterarían su duración y dificultad en aspectos diversos. Incluso es conveniente que, en una segunda fase, los valores se dejen a la discusión y elección de los jugadores, fijando las reglas de nuevos juegos. No obstante, tras el enunciado, se ofrecen algunas variantes-modelo del correspondiente juego.

Como ejemplo del efecto producido por la modificación de los parámetros del enunciado inicial, tomemos La magia de un año:

¿En qué año Colón descubre América? Con las cifras de ese año, operando con ellas y sin repetirlas, construir números comprendidos entre el 30 y el 40. Un punto por cada uno.

1.- *Elección de las cifras*. Desde fórmulas de predeterminación: *en qué año nació tu hermano mayor, llegó un hombre a la Luna...* que permiten prever las cifras a em-

plear; hasta otras aleatorias: *los jugadores dicen cuatro cifras al azar, se extraen cuatro naipes de una baraja (valores convencionales para 8 y 9), se abre un libro por dos páginas y se toman las dos últimas cifras de cada una...* Aunque de forma difícilmente controlable, influirían en la dificultad.

2.- *Rango de los resultados. Entre el ... y el ...* En el enunciado se menciona el intervalo (30, 40); la variación puede muy bien extenderse a decenas de números de dos cifras: (50, 60), (13, 23)...; o (-5, 5), si se trabajan los números enteros; o (0, 1) para décimas, si se recurre a los números con coma... Es decir: se dispondría ya de una colección amplísima de problemas. En función de las cifras a operar y de los otros condicionantes, podrían quedar limitados los resultados a obtener en cada intervalo.

3.- *Empleo obligatorio o no de las cuatro cifras.* Que duplicaría las variantes.

4.- *Pudiendo o no formar números con dos cifras yuxtapuestas.* Ídem.

5.- *Limitación en las operaciones a emplear.* En varios aspectos:

Fijando operaciones: *sólo con sumas y restas, sólo se puede multiplicar y restar, pueden emplearse factoriales...* En niveles más elevados darían lugar a más de un centenar de variantes (!!!).

Al hablar de operaciones, se ajustarían a las conocidas por los alumnos hasta el momento. Pero las cuatro operaciones aritméticas tradicionales pueden ampliarse con la *potenciación* y *raíz cuadrada*, por supuesto, y -¿por qué no?- con la *factorial de un número* (!).

Prohibiendo alguna operación: *no se puede dividir, la raíz cuadrada no la consideramos operación...* Para el caso de una sola prohibición, en los niveles más elevados originarían siete variantes (+, -, $\times$, :, p^q , !, $\sqrt{\quad}$).

Pudiendo o no repetir operaciones; o repitiendo como mucho una de ellas, una sola vez... Con lo que las variantes quedarían multiplicadas por cuatro.

Algunas de estas limitaciones vienen impuestas por el nivel educativo, cual es el caso de las *potencias* y *raíces*, o de la misma *división*.

6.- *Tiempo de respuesta. En ... (3, 5) minutos, para mañana...*

7.- *Fórmula de atribución de puntos, un punto por cada número, o un punto al primer número, dos al segundo, tres al tercero...*

En resumen no es exagerado afirmar que podrían así establecerse condiciones que dieran lugar a varios millares de enunciados diferentes, de dificultad y atractivo también distintos.

Para no aumentar innecesariamente estas páginas, he preferido presentar las variantes bajo un mismo enunciado base, dejando al profesor o monitor la tarea de fijar los parámetros más adecuados a las circunstancias y nivel del o de los estudiantes.

Por lo general, se presentan como *juego para varios jugadores*, con un mayor ingrediente de competitividad, desafío y estímulo para la propia superación, medida del progreso personal, etc. Pero fácilmente se transforman en *solitarios* (pasatiempo) o en *juegos para un solo jugador* (bajo la dirección de un juez).

Cuando participen más de dos jugadores, y si no se advierte otra cosa, se disponen *en círculo* o *cadena cerrada*, con un orden de participación claramente establecido. Es muy importante saber en cada momento quién precede y quién sigue a cada cual, pues no será extraño se produzcan eliminaciones a lo largo de la partida. Para cada jugada hay un *jugador de cabeza*, que inicia el juego, y que irá rotando según el orden establecido. De ordinario, una partida abar-

cará, si es posible, una *ronda completa*, en la que todos los jugadores hayan ejercido de *cabeza*.

Los contextos o escenarios que configuran los enunciados deben tomarse con muchas reservas... Simplemente: me parecía descarnado un enunciado abstracto, sólo referido a números y operaciones. Si alguno resulta alejado a los intereses del alumno o chirría en algún aspecto, cúlpese a las prisas y a mi inadvertencia; se ruega sustitución.

No dudo que el lector, con su imaginación y pericia, puede sugerir una pléyade de nuevos juegos, o tenga noticia de otros, publicados en manuales, antologías, revistas, almanaques... Si los difunde, quedamos agradecidos todos los mat-jugadores y la Matemática Recreativa en general. ¡Lástima no haberlos conocido antes!

Suerte, que seas un buen jugador, mejor cada día.

A) Sucesiones

1 Tropiezos. El primer jugador dice un número entre 10 y 20, por turno, se van sumando dos unidades. Quien se equivoca *tropieza* y se detiene hasta que *tropiece* el que le precede. El juego se termina cuando se alcanza la cumbre del 90. Cada jugador se anota tantos puntos como veces haya participado. La partida se completa con la *ronda de empezar*. Gana la partida el jugador que alcance mayor puntuación.

Variantes:

- a) A partir del, teniendo como cumbre el
- b) *Zancadas* de 3, 4... unidades; 1, para los más pequeños.
- c) En descenso, restando.
- d) Cambiando el sentido de la marcha en cada *tropiezo*, sin interrumpir la participación.
- e) Con zancadas decimales (0,2, 0,6...)

2 *Pin*². Los jugadores, según su orden, van diciendo números correlativos: 1, 2, 3, 4,... Cuando corresponde decir un número que *termine en 7* (17, 27, etc.) o *múltiplo de 7* (14, 21, 28...), dirá en su lugar “pin”, y cambiará el sentido de la marcha numérica; es decir: el siguiente número será dicho por el mismo que dijo el anterior al pin. Queda eliminado el jugador que se equivoca por omitir un “pin” o decirlo indebidamente, por intervenir a destiempo, o no respetar el sentido de la marcha...; también por tardar un tiempo prudencial en intervenir. La cadena se recompone, restableciendo el orden anterior. Se reinicia la cuenta a partir de 1, tras cada interrupción o eliminación, desde el último jugador interviniente y en el sentido que traía el juego. Cada jugador se anota tantos puntos como jugadores hayan sido eliminados hasta él -inclusive).

(Conviene determinar de antemano si el 7 y el 77 son “pines” sencillos o “pin-pin”, sin alterar el sentido del recuento.)

Son altamente emocionantes las *finales* o *mano a mano* entre los dos últimos jugadores. No es difícil entonces sobrepasar la centena, obligando a un rápido esfuerzo de cálculo.

Variantes:

a) El juego del “pan²”: con el 8, 9, 6... (Con el 10 y el 5 resulta mucho más sencillo, adecuado a los primeros niveles.)

b) Pin-pán: con el 7 y el 5; cuando corresponda a múltiplo de 5 se dice pan; cuando múltiplo de 7 y 5 (35), pin-pán, y no cambia el sentido de la marcha.

² Debo confesar que este juego, que luego he hallado muy difundido en ciertos ambientes infantiles y juveniles, no fue conocido por mí hasta pasados los veinte años. Se trataba, en aquella ocasión, de un grupo de estudiantes universitarios, viajando en tren, dispuestos a hacer más llevadero el tiempo que tan lento parecía discurrir, sin juego alguno o libro que llevarnos a las manos. Lo abandonamos al cabo casi de una hora, demostrado que el campeón en cada partida sólo podía ser uno de dos, o a lo sumo tres de entre todos los excursionistas; ciertamente, eran campeones: en cálculo y, sobre todo, en reflejos. aunque también en astucias.

c) Con eliminatorias previas, para grupos de 3 ó 4 alumnos.

3 *Despertando cucos*³. Se fija dónde (para qué número) se encuentran los *cucos*; se corresponderán con los números *terminados o múltiplos* de ese valor (7, por ejemplo).

Para cada jugada se determina: el número de salida y la longitud de los pasos (p. ej.: 3 y 6, respectivamente). Puede hacerse por azar o decidirlo el jugador primero.

Por orden, cada jugador suma un paso al número cantado (o encubierto) por el anterior; si resulta ser un “*cuco*”, dirá “*cucú*” (9, 15, cucú, 27...) El jugador que responda incorrectamente -o que se demore en exceso- queda eliminado, anotándose tantos puntos como jugadores se hayan retirado hasta el momento (él incluido). Se rehace la cadena en ese lugar, y se reinicia el juego en el jugador siguiente.

Variantes:

a) Los “*cucos*” cambian el sentido de la *rueda*.

b) No se retira el jugador que se equivoque: simplemente, se anota un punto negativo.

c) Confrontación por parejas cruzadas.

d) Partir de un número comprendido entre 90 y 100, y proceder por restas.

e) Pasos de décimas o centésimas, con *cucos* en los números enteros.

4 *La escalera*. - Por sorteo o acuerdo, se determinan: el número de salida, la altura a alcanzar y el máximo de escalones a subir por jugada. Cada jugador, por turno, sube cuantos escalones desee, a partir de donde quedó el jugador anterior, en número menor o igual que el máximo acordado -pero siempre alguno- indicando en que escalón

³ Puede considerarse como una generalización o variante del Pin.

queda. El jugador que se equivoque -que suba más de los escalones permitidos- es eliminado. Gana el jugador que antes llegue y cante el total previsto.

Variantes:

- a) Partir de 0.
- b) Puntos de partida y llegada prefijados para el campeonato.
- c) *La escalera que baja.*
- d) Máximo de fichas a aportar diferente para cada jugador.
- e) Pierde el jugador que alcance el total previsto.

5 La pirámide. El jugador a quien corresponde la salida propone un número menor que 10. Cada jugador multiplica por 2 el resultado obtenido por el anterior. Queda eliminado el jugador que no lo consiga -por error o demora excesiva-, reiniciándose la pirámide por el jugador siguiente; hasta que quede un único jugador.

Variantes:

- a) Pirámides del 3, del 4...
- b) Número inicial menor que 1, o con parte entera y decimal.
- c) *Pirámides decrecientes:* a partir de un número de tres cifras (dos o cuatro), dividiendo por 2 (3, 4...)
- d) *Pirámides fraccionarias:* multiplicando por $2/3$, $3/5$, etc.

B) Construcción de expresiones numéricas

6 Permutaciones. Se propone un número entero de tres cifras distintas. Cada jugador, por turno, dice un número formado por las mismas cifras, pero en orden distinto de los anteriores. Se anotan un punto positivo los jugadores que lo

consigan o el que descubra que se han agotado las permutaciones; un punto negativo quienes repitan.

Variantes:

- a) Números de cuatro, cinco cifras.
- b) Números con sólo parte decimal, o parte entera y decimal.
- c) Un punto al primer número, dos al segundo...
- d) Poner condiciones a los números (divisible o no por 2 ó 4, menor/mayor que... etc.)

7 *El número que crece.* Cada jugador dice un número añadiendo una cifra al número del jugador anterior, con la condición de que no se repitan cifras. Si lo consigue, se anota un punto; si se equivoca o retrasa, pasa el turno al jugador siguiente, hasta que se reconoce la imposibilidad de añadir más cifras.

Variantes:

- a) Fijando el lugar a ocupar por cada nueva cifra: al principio, al final o en medio.
- b) Con la condición de distinta paridad para cifras contiguas.
- c) Fijando el número máximo de cifras.
- d) Prohibiendo cifras.
- e) Determinando las cifras a emplear y el número de cifras, y levantando la condición de *cifras diferentes*.
- f) Con la condición de que la nueva cifra se sitúe alternativamente al principio y al final.
- g) Cada jugador se anota tantos puntos como cifras tenga el número que propone.

8 *Creecer hecho un lío*. Cada jugador dice un número con una cifra más que el del anterior, sin que haya dos cifras iguales y tal que las cifras se encuentren en orden distinto. Se anotará tantos puntos como cifras formen el número.

Variantes:

- a) Un punto por número construido.
- b) Pueden repetirse cifras, hasta un número total determinado (6, por ejemplo).
- c) Números menores que 1.
- d) Los números pueden contener parte decimal.

9 *Creecer cabeza abajo*. - Cada jugador dice un número que contenga las mismas cifras que el del jugador anterior, pero en orden inverso y añadiendo una cifra más, distinta de las otras. Si lo consigue, se anota un punto; si se equivoca o no lo logra en un tiempo prudencial, pasa al jugador siguiente.

Variantes:

- a) El jugador se anota tantos puntos como cifras tenga el número construido.
- b) Pueden repetirse cifras, hasta un total predeterminado (6, por ejemplo).
- c) Números menores que 1.
- d) Números con parte decimal.

10 *El orden protegido*. Se propone un número entero de cuatro cifras distintas. Cada jugador, a su turno, propone un *orden de unidades*; los restantes, preparan otro número que conserve la cifra de ese *orden* y permutan las otras. El primero que diga su número correcto, recibe dos puntos; los demás, uno, si son correctos.

Variantes:

- a) Número propuesto de tres, cinco, seis cifras.
- b) Fijar dos *órdenes de unidades*.
- c) Ídem, cambiando las otras cifras, sin repetición.
- d) Números menores que 1; o con parte decimal.

11 Muertos y heridos. Por turno, un jugador ejerce el papel de *castellano* o *defensor de la plaza*, y piensa un número entero de cuatro cifras no repetidas. Los restantes, van proponiendo números de cuatro cifras distintas; los aciertos de cifras en su orden de unidades son contabilizados como muertos; las cifras incluidas en el número pensado en orden distinto, como heridos. El juego continúa hasta que uno de los *asaltantes* consigue acertar el número, anotándose un punto.

Variantes:

- a) Se admite el 0 como primera cifra.
- b) Números de 3, 5, 6 cifras.
- c) Poner alguna condición de divisibilidad para el número pensado y los propuestos: divisibles por 4, no divisibles por 9, etc.
- d) El jugador que no acierte ninguna cifra queda eliminado hasta el siguiente número.
- e) Números menores que 1.
- f) Números con parte entera y decimal.

C) Construcción de números mediante operaciones

12 El príncipe que prohibió una cifra. Un príncipe tenía seis dedos en una mano. Sus enemigos dieron en burlarse de él:

cada vez que tenían que pagar alguna cantidad que llevara un 6, decían “¡*príncipe!*”; como, por ejemplo: *diecipríncipe* (16), *principenta* y dos (62), *principentos* (600)... Así que prohibió bajo pena de multa “que nadie escribiera o dijera cantidad ninguna que llevara un 6”. Si fuéramos de visita a ese país, ¿cómo nos las arreglaríamos (mediante qué operaciones) para decir 6? ¿Existe más de una forma? ¿Y 16? ¿Y 61? ¿Y 66?

Variantes:

- a) “El príncipe que tenía alergia al ...” (cifra prohibida: 8, 9, 1...)
- b) En 2 minutos, decir operaciones que den como resultado... sin emplear la cifra del ... Por cada una, un punto.
- c) En ... minutos, escribir el ... sin emplear el... (cifra prohibida). Al jugador que lo consiga con menos signos, 3 puntos; al siguiente, 2; a los restantes, 1; quien no lo consiga, 0.
- d) Ídem, con menos operaciones.
- e) ¿Cómo obtener también precios con céntimos: 1,60, 6,60...?

13 *El príncipe que se enamoró del 5.* Érase una vez un pequeño príncipe que, al empezar a conocer los números, se hizo muy amigo del 5; quizás, porque son los dedos que normalmente tenemos en cada mano y en cada pie. Además, lo conoció cuando tenía cinco años. Y tenía cinco amigos, comía cinco veces al día, se levantaba a las cinco, sólo decía frases con cinco palabras... Lo malo fue que, cuando llegó a ser rey, dispuso que *sólo se pudieran decir y escribir cantidades empleando el 5*; ¡y menudo problema para sus súbditos!... Pero a un chico de tu edad se le ocurrió una idea fantástica: hacer operaciones empleando la cifra del 5. ¿Y sabes qué pasó?... ¿Se podrán obtener así todos los números?... ¿Serías tú capaz? (Por lo menos, consíguelos hasta el 20.)

Variantes:

- a) Los números entre ... y ...

- b) La expresión que emplee menos cincos para obtener tu edad.
- c) Sacar un número al azar (la página por la que se abre un libro, por ejemplo), y construirlo operando con cincos. El primer jugador que lo logre se apunta un tanto.
- d) Ídem, en un minuto; el que lo consiga con menos cifras se anota tantos puntos como jugadores haya, el segundo uno menos, etc.; los que no lo consigan no se anotan nada.
- e) Determinar previamente las operaciones permitidas; o prohibir alguna.
- f) Con el 3, con el 6, con el...
- g) ¿Y los precios con una sola cifra entera y otra decimal: 1,50, 3,6...?

14 Dos cincos. ¿Qué números se pueden obtener empleando solamente dos cincos?

Variantes:

- a) En ... minutos.
- b) Un punto por cada número que se vaya diciendo.
- c) Con tres cincos.
- d) Con dos ... (4, 6, 3...)

15 Las dos cifras del destino. Se abre un libro por una página cualquiera. Con las dos últimas cifras de esa página, ¿qué números se pueden obtener empleando solamente esas dos cifras? Un punto por cada número, tres puntos para el mayor.

Variantes:

- a) Con las dos cifras del día del cumpleaños de los jugadores.

- b) En ... minutos.
- c) Con las tres cifras del número de la página.
- d) Fijando o no operaciones, prohibiendo alguna, pudiendo o no unir cifras...

16 Tresydds. Los jugadores proponen tres cifras y dos operaciones. Con sólo ellas, obtener el número mayor.

Variantes:

- a) Pudiendo o no elegir cifras de entre las tres dadas (con repetición).
- b) Ídem, operaciones.
- c) Pudiendo unir las cifras formando números, y prescindiendo de alguna operación (o de las dos).
- d) El menor número.
- e) El número más próximo a ...

17 Cincocincos. El *jugador de cabeza* propone un número menor que 100; los restantes intentan construirlo empleando cinco cincos. El primero que lo consiga recibe un punto.

Variantes:

- a) Los números entre ... y ...
- b) En... minutos: un punto al jugador que diga el primer número, dos por el segundo, tres por el tercero...
- c) Pueden o no emplearse cantidades formadas por dos o más cincos (55, 555...)
- d) Pudiendo o no repetir las operaciones.
- e) Determinar previamente las operaciones permitidas o prohibir alguna.

- f) Con cinco ... (3, 4, 6...)
- g) ¡Más difícil todavía!: con cuatro cincos (treses, cuatros, seises...)
- h) Pueden proponerse números fraccionarios o con coma.

18 *La magia de un año.* ¿En qué año ... (se descubrió América, nació tu hermano mayor, se inauguró el colegio...)? Con las cifras de ese año, operando con ellas y sin repetirlas, construir números comprendidos entre el 30 y el 40. Un punto por cada uno.

Variantes:

- a) Entre el ... y el ...
- b) Utilizando obligatoriamente las cuatro cifras.
- c) Pudiendo o no formar números con dos cifras yuxtapuestas.
- d) Fijando operaciones, prohibiendo alguna, pudiendo o no repetirlas...
- e) Los jugadores dicen cuatro cifras al azar.
- f) Obtener el 0,5, el 1,4..., $1/3$, $\sqrt{2}$...

19 *La clave desintegradora.* Mi amigo Viñu me enseñó en cierta ocasión que íbamos de viaje un juego que acostumbraba con sus alumnos de 12- 13 años en las excursiones por carretera. Más o menos, consistía en lo siguiente:

“Hay automovilistas osados, que nos adelantan sin saber que somos magos, poseedores de poderes mágicos. Bastaría que encontrásemos la *clave de su número de matrícula* y su automóvil se desintegraría instantáneamente, dejándole en medio de la carretera sin carrocería, sin motor, sin asientos, sin volante: ¡vaya sorpresa!

¿Que cuál es la clave? Te la revelaré, ya que eres amigo mío. Es muy sencilla: basta con encontrar los signos de operación que, interpuestos entre las cifras de la matrícula, conduzcan a un resultado nulo. Los paréntesis puedes emplearlos cómo y dónde quieras. Las cifras puedes tomarlas de una en una o agrupadas; lo importante, lo decisivo, es que el resultado sea cero. ¡Ah!: y no modifiques el orden de las cifras.

Hay una condición y un peligro. La condición es que descubras los signos antes de que el coche desaparezca de tu vista o te adelante otro; de lo contrario, estás expuesto a que otro automovilista lo use contigo o incluso él mismo, si se da cuenta de que lo observas. El peligro es que si la combinación de operaciones que propones es falsa, podría ocurrir que fuera nuestro coche o autocar el que desapareciera.

Veamos cuántos coches es capaz de desintegrar cada uno, apuntándose la desintegración el primero que lo diga. Si falla, amén del riesgo que corremos todos de quedarnos tirados, se le quita un punto.

De lo que deduzco que, si nos adelanta el coche matrícula M-5459- JW, una buena clave podría ser: $5-(45:9)$.

El camión BI-1723 DZ, desaparecería con $1-7+(2\times 3)$ aunque le sobrarian los paréntesis.

Pero necesitamos ayuda: ¡nos adelantó VA-3017 CC, y no somos capaces de disolverlo!

Variantes:

- a) No se hace cuenta de los paréntesis; o no están permitidos.
- b) Condicionar las operaciones a emplear: cuáles sí, cuáles no, con o sin repetición.
- c) No se permiten cifras yuxtapuestas para formar cantidades.

- d) Cantidades de tres o cinco cifras.
- e) Igualar a... (cifra prevista o a indicar en cada momento por *la madre*).

20 *El monolito*. En las afueras de una antigua población había un monolito con números grabados: 111, 222..., 999. Le llamaban La piedra del 6. Según parece, tuvo pintados en tiempos ciertos signos de operaciones -hoy desaparecidos; quizás también paréntesis-, de forma que el resultado era siempre 6. ¿Podrías tú volver a poner esos signos?

Variantes:

- a) Adjudicar un punto por cada expresión correcta.
- b) Incluir la inscripción 000 (empleando factoriales).
- c) El monolito del 3, del 2...
- d) Expresiones de cuatro cifras.
- e) El monolito del 0,5 (del $\sqrt{2}\dots$)

21 *Desvelar el secreto*. El *guardián* piensa un número entero que sólo él conoce (puede anotarse en secreto). Los restantes, por orden, le proponen multiplicarlo y después sumar valores enteros a elección de cada jugador (no se pueden repetir los operadores del anterior). El primero que descubra el *número secreto* se anota tantos puntos como jugadores intervengan en el juego, un punto menos por cada intento. Si no lo logra ninguno, se los anota *el guardián del secreto*, tras revelarlo: si cometió error al dar el resultado, no sólo no consigue nada, sino que pierde un punto de los que tuviera.

Variantes:

- a) Condiciones para el *número secreto*.
- b) Condicionar los valores a multiplicar y sumar.

c) Operaciones a las que se somete el *número secreto*.

22 El número fantasma. Cada jugador, por turno, piensa un número entero de tres cifras (puede anotarse en secreto). Los restantes, también por turno, proponen números o cuestiones acerca de su naturaleza que deberán ser respondidas como “sí” o “no”. El jugador que acierte el número se anota la diferencia en puntos entre 10 y las preguntas formuladas hasta el momento, 1 punto, al menos. Si al cabo de 10 preguntas no se ha logrado, el *carcelero* se anota los 10 puntos, salvo que se descubra que respondió incorrectamente alguna de las cuestiones.

Variantes:

a) Determinar los tipos de preguntas (“mayor/menor”, “par/impar”, “empieza o termina por...”, “incluye un...”, “divisible por...”, “primo”, “potencia de...”). O prohibir alguna: “no se puede preguntar sobre las cifras que lo forman”...

b) Números de dos, cuatro, cinco cifras.

c) Números menores que 1.

d) Números con coma.

e) En lugar de preguntas: cada ... (20, 30) segundos, el *carcelero del número fantasma* suelta una pista, hasta 10.

23 La diana. Con los números 2, 22, 33 y 333 -y sólo ellos- aproxímate lo más posible al 100, utilizando los signos de operaciones que quieras. (Tantos puntos como jugadores al que más se aproxime, dos al siguiente, etc.)

Variantes:

a) Sin repetirlos.

b) Empleando los cuatro.

c) Puedes usar paréntesis.

- d) Sin repetir operaciones.
- e) Cambiando el número-diana.
- f) Cambiando los *números-dardo*.

D) Cadenas

24 Tenis matemático. Raquetas: mentes matemáticas. *Pelota:* el resultado a obtener de cada operación planteada sobre el resultado anterior. *Campo...*: el ámbito numérico que se determine con las limitaciones -que hagan visibles *la red y las líneas*-.

En cada *game* o *juego*, se denomina *servicio* al jugador que aporta el valor inicial y comienza la cadena de operaciones; *resto* al contrincante.

Con un poco de fantasía, podríamos hablar de las jugadas: los *passing-shots* y los *drives*, de las sumas; los *reveses* y *dejadas*, de las restas; los *lobs*, de las multiplicaciones; los *smash*, de las divisiones...

La pelota *caerá fuera* si el resultado queda fuera del dominio numérico predeterminado independientemente de la respuesta: el fallo fue del lanzador, que propuso una operación con resultado inadecuado. Si es incorrecta la respuesta, la pelota dio en *la red*.

El tiempo disponible por cada jugador para devolver la pelota al otro campo: debe bastar el buen sentido; si es necesario se nombra un *juez de silla*; incluso cronómetro en mano, si es preciso.

El sistema de puntuación puede muy bien ser el mismo del tenis ordinario: cero o nada, quince, treinta, cuarenta, *justs*, *ventaja...* *juego* o *game*, *set*, *match*; *pelota de set*, *pelota de match*, ¡*victoria!*... Si se alarga demasiado, se acorta a tres o cuatro juegos por set.

Reglas de juego:

- a) Si no se ha determinado para todo un campeonato, antes de iniciar el partido se fija el dominio de valores numéricos y el mínimo y máximo que pueden alcanzarse con los cálculos. Asimismo, deben determinarse qué operadores podrán actuar.
- b) Por turno, un jugador actúa como *servicio* mientras dura un *game* o *juego*, proponiendo la operación inicial para cada punto.
- c) Cada jugador debe dar el resultado sobre la operación propuesta por el otro y enuncia un nuevo operador.
- d) Los *errores* podrán ser apreciados tanto por el otro jugador como por el *juez de silla*, si lo hubiere. Un error supone la interrupción del *juego* y la anotación del *punto* al jugador contrario.

Variantes:

- a) Según el nivel de cálculo de los contendientes y la práctica que se pretenda, se seleccionan operadores más o menos dificultosos: de dos cifras, negativos, etc.; o campos menos frecuentados: entre 150 y 300, entre -200 y 200, etc.
- b) Partidos de *dobles*: basta fijar un *turno en el servicio*, con resto alterno o libre. (Aporta variedad, a la hora de un campeonato tipo *Copa Davis*.)

25 *Fútbol matemático*. Se delimita el *terreno de juego*. Los *jugadores de los dos equipos* se sitúan intercalados, en orden. Los capitanes fijan sus *porterías*, una en cada mitad del campo. Cada jugador, a su turno, dice un operador (operación y número) y el resultado al actuar sobre la cantidad dejada por el jugador anterior. Si coincide con la *portería del equipo contrario*, consigue *gol*; si el resultado es erróneo *-falta-* o no cumple las condiciones del *campo -sale fuera-*, el jugador siguiente inicia de nuevo el juego *-saca-*.

Variantes:

- a) Características del terreno de juego: intervalo y tipo de resultados, operadores, etc.
- b) Los dos equipos frente a frente, seleccionando cada jugador el contrincante sobre quien cae el balón-resultado.
- c) Duración del juego: tiempo, número de goles, etc.
- d) Número de jugadores por equipo, con posibilidad de cambios.
- e) *Tarjeta* al jugador que corrija erróneamente a otro un resultado.

26 Ping-pong matemático. Palas: las mentes matemáticas de los jugadores. *Pelota:* el resultado que se va obteniendo por encadenamiento de operaciones sobre el valor inicial.

Mesa-Campo...: el dominio de resultados y operadores a aplicar, que hagan visible los *bordes de la mesa y la red*. Determinados por las limitaciones prefijadas o a convenir por los jugadores.

En cada *juego* o *punto* a disputar se denomina *servicio* al jugador que propone el valor inicial y las sucesivas operaciones. *Resto* al contrincante, que deberá dar los resultados correspondientes.

Reglas de juego:

- a) Se alternan los papeles de *servicio* y *resto*.
- b) Al *servicio* le corresponde proponer el saque -un valor inicial y un operador- y los sucesivos *lanzamientos* -operadores sobre resultados de respuesta-. Si el operador propuesto o el resultado potencial no se ajustan a lo convenido, el *resto* se anota un *punto*.

c) Al *resto* corresponde dar el resultado de respuesta a la operación del operador propuesto por el *servicio* sobre su respuesta anterior (salvo en la *primera jugada*, o *saque*). Si comete error se anota un punto el servicio.

d) La partida termina cuando uno de los jugadores alcanza los 20 puntos, con una diferencia mínima de dos puntos sobre el contrincante. De lo contrario, el juego se prolonga hasta que se logre dicha diferencia.

Variantes:

a) Tipo de operadores: operaciones y operando.

b) Dimensiones de la mesa-campo: dominio numérico e intervalo.

c) Ping-pong por parejas: alternando el papel de *servicio* en cada pareja; con resto alternado o libre.

27 ¡*Por despistado!*. Para cada partida se fija una *diana*, número entero de dos cifras, y cada jugador elige una *flecha*, consistente en una cifra distinta. El jugador de cabeza propone un número de salida, operando cada jugador el resultado que deje el anterior por su *flecha personal*, intentando aproximarse a la *diana* (puede elegir operación, dentro de las permitidas). Si un jugador consigue *diana*, queda eliminado el anterior *-por despistado-*. Si al cabo de la ronda (o un número de rondas que se aproxime a 10 jugadas-operación) no se ha hecho *diana*, queda eliminado el jugador que obtuvo el número más alejado.

Variantes:

a) Dominio numérico de resultados.

b) Con sólo las operaciones ...

c) Obtener resultados menores que la *diana*.

d) Obtener resultados mayores que la *diana*.

- e) Obtener resultados dentro de un cierto intervalo.
- f) Obtener resultados alternativamente inferiores/superiores que la *diana*.
- g) *Diana* entre 0 y 10 y flechas del tipo 0,x.

E) Otros juegos. Aprovechamiento marginal

Existe una multitud de juegos tradicionales en los que se utilizan materiales de lo más simples: *legumbres, botones, monedas, círculos recortados en papel o cartón...* No pocos de ellos tienen un soporte claramente matemático o pueden ser aprovechados para ejercitar capacidades relacionadas con el cálculo mental. En algunos casos, exigen algoritmos nada sencillos para su resolución formal. Aquí interesan tan sólo en la doble dimensión lúdica y de exigencia de actividades -forzosamente- mentales: representaciones, combinatoria, recuentos, conservación en memoria de resultados, cálculos comprobatorios...

28 *Las torres de Hanoi*. "En el gran templo de Benarés, bajo la cúpula que señala el centro del mundo, reposa una bandeja de cobre en la que están plantadas tres agujas de diamante, más finas que el cuerpo de una abeja. En el momento de la creación, Dios colocó en una de las agujas 64 discos de oro puro, ordenados por tamaños, desde el mayor que reposa sobre la bandeja, hasta el más pequeño, en lo más alto del montón. Es la Torre de Brahma. Incansablemente día tras día, los sacerdotes del templo mueven los discos haciéndoles pasar de una aguja a otra, de acuerdo con las leyes fijas e inmutables de Brahma, que dictan que el sacerdote en ejercicio no mueva más de un disco a la vez, ni lo sitúe encima de un disco de menor tamaño. El día en que los sesenta y cuatro discos hayan sido trasladados de la aguja en la que Dios los puso al crear el mundo a otra aguja, ese día la torre, el templo y todos los brahmanes se derrumbarán, quedando reducidos a cenizas y, con gran estruendo el mundo desaparecerá."⁴

⁴ W. Ahrens, *Mathematische Unterhaltungen und Spiele*

Sugerencia. Para facilitar la comunicación oral, basta designar los discos por 1, 2, 3... (o 1º, 2º, 3º...) y las agujas por *derecha*, *izquierda* y *centro*.

Variantes:

a) Número de discos: 3, 4, 5...

b) La *torre final* formada sólo por ciertos discos de la *torre inicial*.

c) Para varios jugadores: conseguir el traslado en el menor número de movimientos, en un cierto tiempo.

29 *NIM*. se disponen 4 montones con 1, 3, 5 y 7 elementos, respectivamente. Cada jugador, a su turno, toma cuantos elementos desee -siempre alguno-, pero de un único montón. Pierde el jugador que se lleve el último elemento (o gana el jugador que obliga al otro a llevarse el último elemento).

Sugerencia. Para facilitar la comunicación oral, basta decir por orden el número de elementos que quedan en cada montón: 1-3-5-7, 1-3-4-7, etc.

Variantes:

a) Número de elementos en cada montón.

b) Número de montones.

c) Nim gana: vence el jugador que se lleve el último elemento.

d) Nim originario: tres montones con 3, 4 y 5 elementos, y gana el jugador que se lleve el último elemento.

e) Limitar el número de elementos a tomar.

f) Buscar estrategias ganadoras.

30 *Divide y vencerás*. Se forma un montón inicial con un número de fichas (imaginarias) acordadas de antemano o

por azar (10, 15, 20...) Cada jugador, a su turno, divide uno de los montones que vayan resultando en otros dos desiguales. Pierde quien no pueda hacerlo (todos los montones tienen una o dos fichas).

Sugerencia. Para facilitar la comunicación oral, basta decir tras cada división la configuración que resulta, en montones de más de dos elementos.

Variantes:

- a) Número de jugadores (campeonatos por eliminatorias).
- b) Buscar estrategias ganadoras.
- c) Expresar mediante fórmulas la estrategia ganadora (si existe).

31 Sol y sombra. En línea: se tienen tres fichas blancas en tres casillas imaginarias a la izquierda; y tres negras a la derecha, con una casilla libre en medio. Las fichas blancas se desplazan siempre hacia la derecha; las negras solo hacia la izquierda. Las fichas de uno u otro color pueden realizar uno de los dos movimientos siguientes: *desplazarse a la casilla contigua si está vacía* o *saltar por encima de una ficha del otro color* siempre que la casilla que se halla a continuación esté libre. Se trata de intercambiar la colocación de las fichas: las tres blancas en el lugar de las negras y viceversa, con el número mínimo de movimientos.

Sugerencia. Para facilitar la comunicación oral, basta designar las fichas blancas por una cifra (1, por ejemplo) y las negras por otra (2); el espacio en blanco, por 0. Una configuración resulta, entonces, como un número o serie de siete cifras: 1-1-1-0-2-2-2, 1-1-0-1-2-2-2, 1-1-2-1-0-2-2...

Variantes:

- a) Con dos, 4, 5, 6, etc. fichas de uno y otro color.
- b) Con número distinto de fichas de cada color.

c) Hallar las fórmulas para calcular el número mínimo de movimientos.

32 ladrones honrados. Se dispone un montón (imaginario) con un número convenido de fichas y se acuerda el máximo de fichas a tomar en cada jugada. Cada jugador toma alternativamente las fichas que desee, menor o igual que el máximo acordado -pero siempre alguna-; debe decir o confesar las fichas tomadas. Gana el jugador que se lleve la última ficha.

Sugerencia. Para evitar equívocos, puede sustituirse por decir las fichas que quedan.

Variantes.-

a) Pierde el jugador que se lleve la última ficha.

b) Decidir por azar el número mínimo y máximo de fichas a tomar.

c) Torneo por eliminatorias de partidas mano a mano.

d) Se fija un máximo de fichas a tomar, diferente para cada jugador.

33 Una a una. Dos montones de fichas (imaginarias), iguales o distintos, convenidos o determinados por sorteo. Cada jugador, a su turno, toma una sola ficha -de cualquiera de los montones-, o una de cada montón. Pierde quien se lleve la última ficha.

Sugerencia. Para facilitar la comunicación oral, basta indicar cuántas fichas quedarían en cada montón.

Variantes:

a) Gana quien se lleve la última ficha.

b) Tomar un número máximo de fichas de cada montón de n fichas. En caso de tomar de ambos montones, igual número.

c) Determinar por sorteo el número mínimo y máximo de fichas a tomar.

d) Número de montones.

e) Torneo por eliminatorias de partidas mano a mano.

La baraja española (40 naipes) puede contemplarse como un conjunto de operadores convenidos:

1º) Cada naipe toma el valor numérico que indican sus puntos; *sota*, *caballo* y *rey* a decidir: 8-9-10 ó 10-11-12.

2º) Los *palos* representarán operaciones: *oros-suma*, *copas-resta*, *espadas-multiplicación*, *bastos-división*.

Así: as de oros = sumar 1, 5 de espadas = multiplicar por 5...

Se diseñan entonces desde carreras ciclistas (por acumulación de resultados) hasta peleas de gallos (desplumando de naipes al contrincante retado); el azar configura fantásticas fortalezas custodiadas por enanos y monstruos que sobornan o narcotizan, apuñalan o golpean...

Asimismo, el dominó ordinario proporciona valores diversos en sus fichas:

Suma de puntos de la ficha,

Producto de puntos de las dos partes de la ficha,

Cantidades de dos cifras (predeterminando el orden menor-mayor o mayor-menor, o a voluntad del jugador).

Y la yuxtaposición de fichas puede hacerse en función de considerar el *valor global* de la ficha anterior o de *una sola de sus mitades*.

Se asciende por imaginarias escaleras, se ensamblan vagones de trenes-mercancía, tienen lugar pacíficos enfrentamientos de ejércitos, etc.

Los naipes o fichas del dominó pueden distribuirse en su totalidad al principio del juego, un número limitado por jugador, robando (en caso de no disponer de naipe o ficha adecuada), etc.

Sin afán de polémica: ¿es aburrido el cálculo aritmético?

Y con afán de polémica: ¿en qué se diferencian las formas de cálculo mental entre estudiantes que padecen o no una deficiencia visual?