BRAILLE Y MATEMÁTICA

José Enrique Fernández del Campo

Braille y Matemática
José Enrique Fernández del Campo
Primera edición: Madrid, 2004

Coordinador: Javier López del Río.
Diseño de la cubierta: ONCE - Dirección de Comunicación e Imagen, Gabinete de Diseño.
Realización de la edición: ONCE - Dirección de Cultura y Deporte. Departamento de Recursos Culturales.
La presente edición ha estado al cuidado de Carmen Roig.

ISBN: 84-
D.L.: M.
Realización gráfica: IRC, S. L.

Impreso en España - Printed in Spain

A mi padre: que me enseñó
a aprender y a querer,
sabiendo del valor del esfuerzo.

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

¿Fue consciente Louis Braille de la potencia de su sistema, del instrumento que ponía *en manos de los ciegos*?

En la primera propuesta de su Sistema, la «Méthode», (1827), ya estaba presente la intención de crear un código para transcribir a relieve de puntos no sólo textos literarios sino también composiciones musicales y expresiones matemáticas elementales.

Abierta para todos los ciegos la puerta —hasta entonces prácticamente cerrada— de la cultura y el estudio, aparecerían nuevas necesidades, hasta entonces nunca sentidas: hacer accesibles a los ciegos los textos de estudio para niveles medios y superiores de enseñanza, con notaciones y representaciones extrañas a los objetivos del creador.

El genio de Louis Braille quizás se manifiesta más claramente en este punto: las posibilidades de su invento superan las necesidades que venía a solucionar y, sin pérdida de coherencia, permite responder a un sinnúmero de retos no vislumbrados en el momento de la creación. Como tantas otras veces a lo largo de la historia, la obra, cual dotada de vida propia, honraba a su creador, rindiendo frutos inesperados.

Entendemos que el universo de notaciones y representaciones matemáticas constituyen el más claro ejemplo de esta potencialidad insospechada.

De las simples notaciones aritméticas, recogidas en su «Méthode» original —o transformaciones que se irían puliendo en el transcurso de aproximadamente cien años—, se abriría a la búsqueda de una expresión en el Sistema de notaciones algebraicas, geométricas y analíticas; respondiendo así a las demandas del número creciente de ciegos que acedían a los estudios secundarios a lo largo de los dos primeros tercios del siglo XX.

A) **SIGLO Y MEDIO DESPUÉS**

De 1960 a 1970 se dan pasos decisivos en direcciones bien distintas y con repercusión bien diferente para la relación Matemáticas-braille.

NUEVAS NOTACIONES SIMBÓLICO-MATEMÁTICAS

El mundo de la Matemática se vio convulsionado por la irrupción en los niveles elementales y medios de educación de la llamada *Matemática Moderna*, que ya desde finales de los años 40 pugnaba por estructurar conceptos y técnicas en los niveles universitarios. Con ella, una cohorte de nuevos símbolos, en cantidad muy superior a los empleados hasta entonces.

Y lo que podía ser más peligroso: abiertos a la creación privada, sin apenas otra autoridad reguladora que el prestigio de cada profesional o la capacidad editorial. Transcurrirían no menos de diez años hasta que Organismos Internacionales tomaran cartas en el asunto de su unificación (1971, Comité Mundial para la unificación de la notación matemática; con sede en Ginebra); y otros diez antes que se vislumbrara el ocaso de la fiebre conjuntista, estructural, terminológica y notacional (quizás provocado por la denuncia de un creciente fracaso escolar).

El Sistema braille debía intentar una respuesta a estas exigencias de los textos de estudio. Desde los primeros momentos, las editoras Braille y los centros de educación de ciegos de todo el mundo se esforzarían por *transcribir* las nuevas notaciones matemáticas, con mayor o menor éxito. Rectifico: con mayor o menor sencillez, potencialidad y coherencia; ya que el *éxito* se logró desde el primer momento: las nuevas notaciones tenían sus correspondientes Braille, útiles al estudiante, por más que resultaran un tanto anárquicas, farragosas, dispares o precisaran de explicaciones complementarias.

Como en el caso de las «notaciones en tinta», se buscaría la unificación que facilitara el trabajo y comunicación entre estudiantes y profesionales de todo el mundo. La tarea, auspiciada por la UNESCO, a través de un Subcomité para la Unificación del Braille, dependiente del WBWC (Consejo Mundial para el Bienestar Social de los Ciegos), culminaría en la propuesta de una «Notación Científico-matemática Braille» (1975-1984), en la que España jugaría un papel protagonista con su «Notación U» de Francisco Rodrigo.

La práctica totalidad de los países latinoamericanos y no pocos del resto del mundo acordaron un Código Matemático Unificado (CMU), basado en buena medida en la «Notación U», aprobado en una reunión celebrada en Montevideo en 1987. Puede afirmarse que se cubren con holgura las necesidades de edición matemática para todos los niveles educativos y, al margen de críticas puntuales, reúne cualidades de alcance, sencillez, gradación y coherencia —incluso estética— envidiables para otras notaciones Braille.

Pero la Matemática no es un simple objeto de estudio para eruditos o diletantes. Está en la vida: en la calle, en el comercio, en casi todos los quehaceres laborales y comunicativos de los hombres y mujeres corrientes de hoy. Quizás por ello, y ante todo, la Matemática está en las escuelas; desde los niveles más elementales hasta los universitarios. La Matemática de las aulas plantea otras cuestiones que las ligadas a su notación simbólica específica.

EL LENGUAJE DE LAS REPRESENTACIONES GRÁFICO-GEOMÉTRICAS

Paralelamente a la mencionada convulsión en los fundamentos, terminología y notaciones matemáticas, los años 60 fueron testigo de un florecer en la preocupación por la enseñanza y aprendizaje de la Matemática, que desembocaría en la aparición de materiales y medios específicos. En particular, se concedió una importancia inusitada a las representaciones en *lenguaje gráfico*; tal es el caso de los *diagramas de Venn*, *diagramas de flechas*, recurso permanente a los *cuadros* y *tablas*, *esquemas*, *mapas conceptuales*, *gráficas* y *diagramas* de todo tipo...

Desde el período helenístico, la Geometría *vivía del dibujo*. Fermat y Descartes llevarían a cabo —el primero— y divulgarían —el segundo— la confluencia Geometría-Álgebra, en la síntesis feliz de la Geometría Analítica, donde fórmula simbólica y expresión geométrica son casi intercambiables merced a un sistema de *ejes coordenados*. El Cálculo Vectorial retomaría la aportación de Arquímedes de la representación de fuerzas mediante *vectores* o *segmentos orientados*, de fácil dibujo.

En nuestros días, la linealidad de las expresiones algebraicas y escasa bidimensionalidad de algunos algoritmos aritméticos o algebraicos contempla con estupor cómo, desde los primeros estadios educativos, se inicia al niño en la *«lectura» y «representación»* de una variedad ilimitada de estos útiles. Expansión que, lejos de frenarse, se extiende a otros campos del saber, respaldada por su indiscutible eficacia didáctica.

Sin empacho, podría afirmarse que «el *lenguaje de las expresiones gráfico-geométricas* se ha convertido en *el lenguaje propio de la Didáctica de la Matemática*».

Pero hay más: las últimas reformas educativas en España reconocen al *lenguaje de representación gráfica* el carácter de «objetivo educativo»; es decir: sobrepasa la condición de *ayuda a la comprensión*, para convertirlo en *procedimiento* o *destreza exigible*.

Los textos Braille no se encuentran cerrados a esta necesidad educativa. Las editoras Braille procuraron incluir tales representaciones al mismo tiempo que se realizaron transcripciones de textos «en tinta» que las incluían; intercaladas en el lugar correspondiente, unas veces, en hojas o cuadernos aparte, otras. Paradójicamente, la dificultad reaparece con las técnicas actuales de producción informatizada del Braille, a la espera de que las impresoras —personales e industriales— admitan una mayor variabilidad en la *matriz de puntos*.

En las aulas, buena parte de estas representaciones son accesibles a su producción por el alumno, gracias a la «lámina de caucho», sin otros medios que un bolígrafo, papel ordinario y un mínimo de destreza manual. Pero se tropieza con lo efímero de estos productos y, sobre todo, con la dificultad extrema de incorporar símbolos, expresiones numéricas y algebraicas.

UN ÚTIL PODEROSO

También en la década del 60 se populariza, entre los estudiantes, el uso de las máquinas de escritura Braille «en punto positivo», entre las cuales, la más popular en España ha sido —y es— la producida por la Perkins School for the Blind, de Massachussetts (USA).

Las tradicionales «pautas» o «regletas», en las que se escribía con punzón, *punto a punto, de derecha a izquierda,* comportaban lentitud, fatiga y ejercicio constante de funciones de simetrización. Además —en el caso concreto de las Matemáticas—, obligaban al usuario a tornar el papel para comprobar la corrección de lo ya escrito o releer datos; aunque no faltaran expertos capaces de «leer por detrás», o técnicas especiales consistentes en alternar la «cara de escritura». Tales dificultades y manipulaciones se reducen al mínimo con dichas «máquinas de punto positivo», poniendo al cómodo alcance de la *mano lectora* los caracteres que se han ido escribiendo.

En el orden técnico, las «máquinas de punto positivo» suponen un salto cualitativo para el Sistema Braille, al menos para su producción-escritura por particulares. Algo de suma importancia para el desarrollo de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas en formato activo.

Sin embargo, entendemos que este adelanto técnico está insuficientemente *explotado*. La máquina Perkins —así se designará en lo sucesivo al genérico «máquina de punto positivo»— se emplea con provecho en las aulas y trabajos personales por alumnos de todos los niveles. Pero tal satisfacción debe estar abierta a la investigación para un aprovechamiento mucho más amplio del *habitual*. En particular —como tendremos ocasión de estudiar— apenas si se ha abordado el problema de la producción personal de *tablas* y *diagramas*; incluso la producción editorial Braille ofrece soluciones muy discutibles.

B) **PROPÓSITO DEL TRABAJO**

He aquí el núcleo de este trabajo: propuestas de solución, mediante el empleo de la *máquina Perkins*, a los problemas que la tarea matemática presenta al alumno en el día a día de la clase o en la quietud de su gabinete de estudio.

Muchas de estas *propuestas* se hallan dispersas en la escasa literatura relativa a Matemáticas y Braille. Algunas, pueden considerarse como «heréticas» o «contradictorias con la doctrina aceptada oficialmente». Otras, por último, serán consideradas como «un lujo expresivo», sin más valor que el de mostrar una aplicabilidad forzada del Sistema. Además, se ha procurado abarcar, justificar e ilustrar la «Notación Científico-Matemática» vigente en España; con ánimo compendioso, aunque fuera innecesario gracias a las *guías* ya existentes.

No es éste lugar para justificaciones: que hablen por sí los ejemplos que se recogen, los criterios y sugerencias que se ofrecen y las razones que los sustentan. Permítaseme, no obstante, subrayar algunos de los aspectos contenidos en el propósito general:

1º Se trata de *propuestas de solución.* En Matemáticas sabemos que *«las soluciones no siempre son únicas»*, y que *«según la situación, puede haber unas soluciones mejores que otras»*. Aplíquese esta óptica de *apertura metodológica*, y se disipará la nube de un posible *carácter normativo*. Ojalá despierte en los profesionales a cuyas manos llegue este trabajo el interés por investigar y lograr *«más y mejores soluciones»*.

2º Se da por supuesto que *el útil de trabajo será la máquina Perkins.* Lo que condiciona fuertemente la posibilidad y grados de libertad representativa, como se verá en los capítulos 4 y 5. Estamos forzados, pues, a

— unas dimensiones máximas por página;

— un solo tipo de punto, si bien podrá jugarse, para el trazado de líneas, con series y configuraciones que permitan una cierta variedad;

— prescindir casi completamente de las *líneas regulares y continuas de puntos*, *oblicuas*, *curvas*, etc.;

esclavitudes que no padecen las editoras que se sirven de clichés y pantógrafos para trazados singulares.

3º Se ha pensado en *el día a día de la clase,* y en *la realización por el alumno.* Que es tanto como decir que se ha procurado tener en cuenta las características de la exploración háptica (tacto-cinestésica) y las exigencias de eficacia y rapidez de elaboración. De aquí, la falta de rubor al recomendar simplificaciones o transformaciones que, si bien pueden contravenir las «normas de transcripción editorial», *facilitan la tarea expresiva*; la claridad quedará siempre garantizada por el contexto, soslayador de equívocos perturbadores: en el dilema *claridad/precisión*, tratándose de procesos didácticos, nos decantamos decididamente por la primera.

Estas dos últimas observaciones animan a aventurar que tal vez puedan destilarse de estas páginas algunas recomendaciones para la producción informatizada del Braille, en tanto se resuelven las actuales dificultades de configuración *hardware* y *software* de impresoras.

4º Se intenta *extender el «valor expresivo»* —reconocido sobradamente al Braille— *proponiendo un cierto «valor calculatorio»,* mediante configuraciones y fórmulas facilitadoras de cálculos directos. (Por *cálculo*, debe entenderse tanto el aritmético como el algebraico, organización e interpretación de datos y tablas, cálculo lógico, estadístico, etc.)

Esto es: además del *valor expresivo*, plasmador de resultados obtenidos por otros medios, se persiguen representaciones estructuradas de datos y resultados parciales que sirvan de soporte inmediato y reduzcan el recurso —en última instancia inevitable— al puro *cálculo pensado*. De alguna forma, se intenta mostrar cómo, en las tareas matemáticas, el Braille y la máquina Perkins se aproximan en su eficacia y versatilidad al trabajo *con lápiz y papel*. Lo que ha obligado en no pocos casos a sustituir la simple *transcripción* o *reproducción* por *adaptaciones* y *reestructuraciones* específicas; incluso se ofrecen modelos inéditos de algoritmos sugeridos por la propia dificultad inicial del Sistema.

C) **PRESUPUESTOS INSTRUMENTALES**

Como se ha repetido ya, el útil de trabajo será exclusivamente la *máquina Perkins* o cualquier otro modelo de «máquina de escribir Braille en punto positivo».

Las dimensiones previstas de la página serán de *30 líneas de 40 caracteres*. Aunque, según el tipo de tarea, pueden reducirse notablemente. De hecho, las dimensiones máximas sólo tendrán relevancia al tratar de las *tablas*, *cuadros*, *diagramas*, etc. (capítulos 4 y 5), dependiendo incluso de las situaciones a representar.

Características de la máquina de escribir

Características		**Aplicabilidad**
Dimensiones de página (recomendadas)	40 c./lin. 30 lin./pág.	Máximos deseables en realización de tablas/gráficas
Recursos mecánicos (posibilidades)	Emplazamiento rápido en columnas retroceso líneas	Muy conveniente en realización de algoritmos bidimensionales
Limitaciones de escritura	Interpolación imposible Borrado exclusiv. manual (difícil) Reescritura deficiente Subrayado/resalt. imposib. *a post.* Puntos uniformes en relieve/tamaño Matriz de puntos irregular Lín. oblicuas/curvas (casi imposible)	Correciones y sustituciones Adición de información Realización de gráficas y diagramas

Es innecesario advertir de la importancia que tiene *un buen estado de funcionamiento* de la máquina Perkins para poder garantizar el éxito en la empresa. Concretamente:

— Correcto marcado de puntos; y

— Correcto funcionamiento del mecanismo de *avance de la cabeza impresora*, al pulsar la tecla «espacio» u otra cualquiera. Que disminuyan la tensión exigida por una continua comprobación del escrito.

— Correcto funcionamiento de la tecla «retroceso». Que evite, asimismo, comprobar si éste ha tenido lugar en la forma deseada.

— Ajuste del «rodillo de sujeción del papel», y

— Correcto funcionamiento del «cambio de línea», ya sea mediante la correspondiente tecla, o mediante el avance/retroceso manual del rodillo.

Se evitarán así los desagradables trastornos de superposición parcial de líneas, que pueden llegar a hacer indescifrable el escrito; peligro tanto más grave en Matemáticas, por cuanto un simple punto en exceso puede alterar completamente el valor de una expresión. El correcto *ajuste entre líneas* jugará un papel importante al tratar expresiones o algoritmos bidimensionales, en los que tal vez sea preciso añadir términos en líneas anteriores. Por último:

— Correcto funcionamiento y paralaje del mecanismo de sujeción inicial del papel. Que mantenga éste perpendicular a la línea de avance de la «cabeza impresora» —contribuyendo también a una correcta sujeción *rodillo/papel*— y que, merced a un ajuste adecuado al «tope izquierdo», impida roces excesivos que dificulten el deslizamiento o propicien *enganchones* y *desgarros*.

Estado y ajuste mecánicos

Consecuencias de un funcionamiento incorrecto

Correcto marcado de puntos

Respuesta pulsación/av. esp.

Respuesta tecla *retroceso*

Corr. sujeción del papel
(ajuste del *rodillo*)

Correcto emplaz. línea | tecla alim. lín. av/retr manual

Correcto paralaje
mecanismo sujeción papel

Riesgo signos erróneos

Posib. corrección de signos

Continuas comprobaciones

Riesgo superposición líneas

Dificulta la realización de
algoritm. bidimensionales

Riesgo *enganches* del papel

Increm. atención y tensión

Increm./acelera fatiga

Increm. tiempo realización

Desvía atención específica

Ciertos lectores tal vez sonrían al hacer previsiones y advertencias tan obvias. Quienes intenten poner en práctica algunas de las aplicaciones que se recogen más abajo, seguro que tendrán ocasión desdichada de comprobar la oportunidad de estas revisiones preventivas.

Llegado este punto, hagamos frente a una crítica segura:

«¿Por qué *máquina Perkins*, y no cualquiera de los dispositivos electrónicos hoy ya al alcance de muchos ciegos (ordenador con Línea Braille, Braille-Lite, etc.)?»

No se desprecian. Pero pospongamos la respuesta y sus razones a la parte final del trabajo, una vez consideradas las propuestas de los capítulos 4 y 5, y el diseño de algoritmos contenidos en los capítulos 1 y 2; se contempla allí la importancia del trabajo en bidimensionalidad, que resultará decisiva: no ya como representación o transcripción, sino como medio para el cálculo (en sentido amplio).

D) **DESTREZAS PRE-REQUISITO**

Aunque resultan evidentes, recordemos algunas de las destrezas que debe poseer el alumno, si se desea un aprovechamiento eficaz de las propuestas que se ofrecen.

Unas, guardan relación con la lectura/exploración del Braille:

1º Capacidad para discriminar y reconocer signos Braille de configuración semejante.

Como se anunciaba más arriba, la notación matemática Braille exige un esfuerzo perceptivo y discriminante superior a los signos del *Braille literario*. He aquí algunos riesgos y defectos posibles:

— Adición de puntos. El *espejismo* de «un punto de más» puede *hacer ver* un «4» o un «8» allí donde sólo hay un «5»; un «2», un «3» o un «5» donde aparece un «1»; un signo de multiplicar donde lo es de restar...

— Omisión de puntos. Algo semejante ocurre con la percepción de «puntos de menos»: confundir «5» por «4» u «8», «1» por «3», «2» o «5», etc.

— Confusión *por simetría* (quizás problemas de lateralidad). Que puede llevar a «entender un 5 por un 9» —o viceversa—, un «4» por un «6», un «0» o un «8», un signo de sumar por otro de dividir o la indicación de fracción...

— Desplazamientos o dislocaciones (de puntos y signos completos). Por los que el signo de «cierre de paréntesis auxiliar» precedido de un número se vincula a éste como un «9»; el «signo de multiplicar» se confunde con un «8», el de «igual» con un «7», etc.; las fracciones en forma comprimida pasan a ser enteros; la «coma decimal» se confunde con «1»; el «prefijo de latina minúscula» se reconoce como «coma decimal» —con los riesgos derivados de considerar ciertas letras como números de la parte decimal—; etc.

Errores al discriminar y reconocer signos Braille de configuración semejante

Espejismos
- adición de puntos
- omisión de puntos

confusión entre signos análogos
- por traslación vertical
- por traslación horizontal
- por simetría de eje vertical
- por simetría de eje horizontal
- por rotación

Desplazamientos
- dislocaciones de puntos
- de signos completos

Mientras que en el *Braille literario* el contexto permite una más fácil autocorrección —por la palabra de la que forman parte o por el sentido de la frase—, no siempre ocurre así en el Braille de las Matemáticas. Con frecuencia, estos errores pasan inadvertidos; a lo sumo, la denuncia de posible error aparece tras haber leído completamente la expresión, invitando quizás a una relectura completa.

Paralelos a estos riesgos de confusión lectora se encuentran los de escritura.

2º Destreza en la escritura de los correspondientes signos matemáticos.

Advertido por la experiencia, el alumno tiende a comprobar intermitentemente el producto de su trabajo, detectando de inmediato un posible error. Pero esto conporta dedicación de tiempo, tensión y desconfianza que le distraen del trabajo estrictamente matemático. Por otra parte, la corrección de la escritura Braille en papel no es fácil ni definitiva.

— El borrado de puntos o términos debe ser muy ajustada —para no extenderse a los contiguos—, y un borrado defectuoso puede inducir a la duda ulterior entre *tachado y poco marcado*.

— La sobreescritura o reescritura es una tarea delicada de emplazamiento de la cabeza impresora y asegurar la claridad del valor definitivo. Esto implica un dominio de las técnicas de *avance/retroceso* en la máquina Perkins, determinación de la celdilla exacta, etc.

— La interpolación es poco menos que imposible, obligando a reescribir la expresión completa.

Cuando deban abordarse representaciones o tareas claramente bidimensionales (algoritmos, tablas, cuadros, diagramas) deberán dominarse técnicas exploratorias más complejas:

3º Determinación y seguimiento de correspondencias por filas y columnas.

La determinación (localización ordenada) y seguimiento de filas (líneas horizontales) debe entenderse como una extensión de las correspondientes operaciones con líneas de texto en la lectura Braille ordinaria. Será frecuente en ciertas representaciones matemáticas que abunden los *espacios en blanco*, con pérdida de continuidad en la exploración táctil, que exigirán el recurso al esquema corporal, sentido de la orientación espacial, regularidad en los desplazamientos dígito-manuales, cálculo de distancias en el ámbito de la página, etc.

Tales destrezas parciales tienen sus homólogas en la exploración de *columnas* (*arriba-abajo* o vertical). Sin embargo, éstas apenas son exigidas en la lectura ordinaria; se requerirá, por tanto, un mayor entrenamiento específico.

Destrezas lectoras

Reconocimiento de signos / velocidad / seguridad

Mantenimiento de correspondencias
- horizontales (en línea) (con esp. en blanco
- verticales (en columna)

Coordinación bimanual
- en paralelo
  - horizontal
  - vertical
- en ortogonal

Generación interior de represent. bidimensionales
- expres./configuraciones
- correspond. espaciales

4º Destreza en tareas de escritura en columna y conservando correspondencias horizontales y verticales.

En principio, suponen una extensión de las destrezas reclamadas para la *sobreescritura*:

— Determinación de la celdilla o columna adecuada.

— Emplazamiento de la cabeza de impresión en dicha columna/celdilla.

Pero la mayor amplitud de desplazamiento supone servirse, por lo general y para mayor rapidez, de

— Destreza en la manipulación y deslizamiento del «dispositivo liberador de la cabeza impresora» en lugar de las teclas de «avance» («barra espaciadora») o «retroceso». Además, si la expresión referencia de columna se encuentra en línea no contigua a la de escritura, será preciso recurrir a

— Destrezas en los *cambios de línea* mediante rotación del «rodillo de sujeción del papel».

A su vez, estas destrezas de coordinación espacial en bidimensionalidad, suponen:

— Facilidad para la generación de *representaciones interiores* que se correspondan con las configuraciones exploradas o a producir.

Bien que se cuenta con el referente físico del escrito en papel, capaz de alimentar y reforzar tales *configuraciones interiores*.

Por su dificultad, se evitan en estas páginas casi por completo la exploración y representación siguiendo *líneas oblicuas*. Es más: se procura la búsqueda de soluciones sustitutorias.

A pesar del encabezamiento, las destrezas enunciadas no deben entenderse, *stricto sensu*, como *pre-requisitos*. Se recomienda una evaluación y entrenamiento previos —en su caso— como garantía de que la atención y esfuerzo quedarán centrados en los aspectos propiamente matemáticos.

Su desarrollo se obtendrá, cierto, con la misma práctica; incluso ésta incluye una motivación concreta, una avaloración, difícil de anticipar en los ejercicios sin otro objetivo que *«la práctica por la práctica»*, por más que se intente teñir de desafío o juego. No estamos hablando de *destrezas relacionadas con la lectura Braille* o *destrezas en la explotación exhaustiva de las posibilidades de la máquina Perkins*, en vacío, sino en relación con las tareas matemáticas: la necesidad expresiva o calculatoria reclamará, a su tiempo, las oportunas destrezas exploratorias y manipulativas.

Para terminar esta Presentación, conviene avisar al lector de dos observaciones que deberá tener en cuenta.

La primera, que no se trata estrictamente de una «Guía» o «Método» de transcripción al Braille de expresiones matemáticas.

Se ha anticipado cómo en diversos lugares se contravienen *normas generales* o *editoriales*, en aras de su aplicabilidad en el trabajo cotidiano del alumno. Sí pueden entenderse como *sugerencias de adaptación*: en especial, para todo lo referente a expresiones bidimensionales (tablas, cuadros, diagramas, etc.), que se hallan aquí —creo— convenientemente justificadas.

Por otra parte, la «tabla de signos matemáticos Braille» no es exhaustiva. En términos generales, nos detenemos en aquéllos precisados por los niveles educativos de la Enseñanza Secundaria. Llevado, no obstante, de un espíritu de completación, se ha procurado cubrir todos los campos conceptuales, pese a que algunas de las representaciones no exijan —a mi juicio— transformación notable o se carezca de una propuesta alternativa satisfactoria.

La segunda advertencia se refiere a las ilustraciones y forma expositiva: por razones de extensión, obligadamente sintética y como *productos terminados*.

Salvo en muy raras ocasiones, las ilustraciones Braille ofrecen la configuración final. Se hurta, por tanto, el proceso dinámico de producción o construcción *paso a paso*. Es de esperar que los *criterios de adaptación* en cada caso y su justificación aporten una cierta descripción y técnicas particulares de cómo se elaborarían en la práctica. Ha sido preciso sustituir, en suma, la *película completa de la carrera* por la *foto-finis de la llegada a meta*, si no se quería convertir cada ejemplo en una *memoria prolija*.

Las situaciones de partida para los ejemplos ilustrativos son exclusivamente abstractas; numéricas o de expresiones formales. La presentación es fría y esquemática, alejada del estilo didáctico y engañosa respecto de un quehacer matemático integral. Pero era preciso atender al fin prioritario de la obra —aplicabilidad matemática del Braille mediante máquina Perkins—. Acéptese, pues, la disculpa de *«no tratarse de una obra propiamente didáctica»*. Se pretende *«mostrar técnicas genéricas a transmitir o sugerir al alumno»,* y no *«provocar en el alumno el descubrimiento original de unas técnicas personales»*; por repulsiva que esta declaración parezca desde el mirador de una Didáctica Participativa.

La tercera es que la inmensa mayoría de las propuestas que aquí se ofrecen se hallan contrastadas por la práctica de aula: fueron aplicadas por alumnos de diferentes niveles de Secundaria del Centro de Recursos Educativos Antonio Vicente Mosquete de la ONCE, en Madrid, a lo largo de los últimos tres lustros. Bien es cierto que algunas de ellas —especialmente las relativas a *cuadros sinópticos*, *esquemas* y *mapas conceptuales*— se emplearon casi exclusivamente en las áreas de Ciencias Naturales, Física y Química, ya que las situaciones matemáticas correspondientes son irrelevantes.

Acerca de su eficacia didáctica, cuentan con mi modesta estimación personal positiva y un criterio evaluador nada desdeñable: la satisfacción que despertó en los alumnos. Móviles originarios del presente trabajo fueron también la confesión de *haber sido la primera vez que se les proporcionaba en tal formato*, e incluso *la duda de que pudieran ser admitidas como escritura correcta*.

Así pues, no se trata de una mera lucubración mental, sino la presentación cristalizada de una serie de *recetas* dispersas en el tiempo y en el universo conceptual científico-matemático, en las que no faltan aportaciones de los propios alumnos. El restringido ámbito educativo en que se aplicó impide que me manifieste con autoridad sobre el momento curricular en que cada una debe introducirse; aunque aventuro que debe seguir a la práctica calculatoria de referencia. Es decir: como solución más sencilla, *económica* y *segura*; pero sobre todo dotada de valor matemático y con posibilidad de contraste con otras técnicas más farragosas —aunque *canónicas*— a las que pretenden sustituir.

Estas páginas no habrían visto la luz, de no ser por la ilusión, buen hacer y esfuerzo demostrados por Carmen Roig durante —¡tantas horas!— la preparación de originales y corrección de pruebas. Para mí ha sido un privilegio y un regalo trabajar juntos estas últimas semanas. Gracias, una vez más.

1. ARITMÉTICA

1.1. ESCRITURA DE NÚMEROS

A) NÚMEROS ENTEROS Y DECIMALES

El Sistema Braille es escaso de signos: con los 6 puntos de una celdilla sólo resultan $2^6 = 64$ caracteres distintos (incluyendo el *«espacio en blanco»)*. Las exigencias de la transcripción literaria se elevan a no menos de 45 caracteres en castellano, 55 en francés... (Recordemos que las «vocales con tilde» y «diéresis» exigen signos independientes, así como los «signos de puntuación».)

Para cubrir las necesidades de otros símbolos se acudió desde el primer momento a los *«signos compuestos»;* en concreto, el empleo de *prefijos* o caracteres que, antepuestos a otros, les conferían un significado diferente del que tendrían aislados. Éste fue el caso del *«prefijo de mayúscula»* (puntos 46) que, antecediendo a una letra cualquiera *la convertiría en mayúscula* (Apartado 2.1A); o el *«prefijo de número»,* que aquí nos interesa.

Las 10 primeras letras del abecedario Braille (**a-j**), precedidas del *prefijo de número* (⠼, puntos 3456), se tornan *cifras arábigas*.

Tabla 1-1. Los dígitos en Braille

Tinta	Braille	
	Notación	Códigos
1	⠼⠁	3456,1
2	⠼⠃	3456,12
3	⠼⠉	3456,14
4	⠼⠙	3456,145
5	⠼⠑	3456,15
6	⠼⠋	3456,124
7	⠼⠛	3456,1245
8	⠼⠓	3456,125
9	⠼⠊	3456,24
0	⠼⠚	3456,245

El afán por simplificar la expresión, facilitar la lectura y escritura, llevaron a conferir al *prefijo de número* la condición de *clave*: basta su presencia inicial, para que mantenga el *valor de conversión numérica* mientras no se advierta de su *desactivación*. En general, el *valor de conversión de letras en números* sólo se transmite a través de:

— las diez primeras letras del abecedario (**a-j**);
— el punto de separación en grupos de tres cifras (punto 3);
— la *coma decimal* (punto 2);
— ciertos convenios locales para otros signos (ver más abajo: *cifras negativas* o *resaltadas*).

Tabla 1-2. Representación de números enteros y decimales

Tinta	Braille	
	Notación	**Códigos**
11	⠼⠁⠁	3456,1,1
12	⠼⠁⠃	3456,1,12
51	⠼⠑⠁	3456,15,1
2002	⠼⠃⠚⠚⠃	3456,12,245, 245,12
2.345	⠼⠃⠄⠉⠙⠑	3456,12,3, 14,245,15
1.600.000	⠼⠁⠄⠋⠚⠚⠄⠚⠚⠚	...,3,...,3,...
1,25	⠼⠁⠂⠃⠑	...,2,...
$1,\overset{\frown}{25}$	⠼⠁⠂⠂⠃⠑	...,2,2,...
$1,2\overset{\frown}{5}$	⠼⠁⠂⠃⠂⠑	...,2,...,2,...
$\bar{1},25$	⠼⠥⠂⠃⠑	3456,1 + 36,...
$\underline{3},04$	⠼⠩⠂⠚⠙	3456,14 + 6,...

Los dos últimos ejemplos corresponden a la expresión de *logaritmos* con *característica negativa* y *mantisa positiva*. Esta *distinción*, *resaltado* o *subrayado* de cifras incorporando al signo Braille de la correspondiente cifra los puntos **3** y **6**, puede emplearse tanto para significar su *valor negativo* como una *tipografía* o *color* diferente del resto de cifras de la expresión.

Sobre el convenio de representación para el marcado del *período* en *números decimales periódicos*, *puros* o *mixtos*, puede aducirse una crítica doble: «a un mismo signo Braille (⠂, punto 2) se le asignan dos significados matemáticos («coma» y «determinación de período»)»; ¿no inducirá a error?

La respuesta es inmediata. En primer lugar, se trata de un convenio, análogo al de adscribir al signo integrado por los puntos 15 los valores de «*cifra 5*» y «*letra e*», según esté o no precedido válidamente del *signo de número*. En segundo, que, al hallarse integrado el *período* en la *parte decimal*, el «*primer punto 5*» («*primera coma*») indica la separación entre *parte entera* y *parte decimal*; el «*segundo punto 5*» («*segunda coma Braille*») señala el comienzo del *período propiamente dicho*. Es decir: en ambos casos será el contexto inmediato quien confiera valor al signo, deshaciendo cualquier equívoco.

El fenómeno de *polisemia* es también frecuente en la notación matemática en tinta. Piénsese, por ejemplo, en la barra vertical (|) con su valor lógico de «*tal que*», simbolización de la relación aritmética «*ser divisor de*», hemisigno del «*valor absoluto*»...

En Braille, la *polisemia* será más acusada, al disponerse de menos signos. Aunque la «Notación Unificada», que nos sirve de guía obligada, procure separar *signos Braille* y *significados matemáticos*, es inevitable que un mismo signo desempeñe funciones diversas.

B) FRACCIONES

Una *fracción entera* puede entenderse como «*representante de un número racional*». Pero también como *operador*, *cociente indicado*, *expresión de una proporción*...

La notación simbólica ofrece *sinonimias* para estos significados:

Significado	Notaciones
Número racional	a b a/b
Operador	a b a/b
Cociente indicado	a b a/b c ÷b a:b
Proporción	a b a÷b a:b

La representación Braille sólo presenta dos variantes, válidas para todas ellas. Una tercera, sólo aplicable a «*fracciones numéricas enteras de denominador positivo*», puede considerarse una «*forma simplificada*»; es, al mismo tiempo, la más común:

Tabla 1-3. Representación de fracciones enteras

Tinta	Braille	
	Representación	**Códigos**
$\frac{a}{b}$	⠁⠲⠃	1,256,12
a/b	⠁⠠⠂⠃	1,6,2,12
a÷b a:b	⠁⠒⠃	1,25,12
$\frac{3}{4}$	⠼⠒⠙	3456,25,145
3/4	⠼⠉⠲⠼⠙	3456,14,256,3456,145
3÷4	⠼⠉⠠⠂⠼⠙	3456,14,6,2,3456,145
3:4 $^{3}/_{4}$	⠼⠉⠒⠼⠙	3456,14,25,3456,145

Las representaciones Braille para expresiones numéricas que incluyen el *signo de dividir* (⠲, puntos 256) o la *barra* (⠠⠂, puntos 6,2), *no puede decirse que sean incorrectas,* simplemente, **son didácticamente desaconsejables.**

La forma «*simplificada»,* como puede deducirse fácilmente, se acomoda a las siguientes *reglas*:

— Sólo aparece el *signo de número* (⠼, puntos 3456) al comienzo de la expresión; salvo que el *numerador* (*dividendo* o *antecedente*) esté afectado por los signos **+**, **−** o **±** en cuyo caso le precederán.

— El *numerador* (*dividendo* o *antecedente*) se escribe a continuación del *signo de número*, y ocupa la «*parte inferior de la celdilla Braille*» (puntos 2356); lo que corrientemente se expresa como: *posición baja*.

— El *denominador* (*divisor* o *consecuente*) se escribe inmediatamente a continuación, sin *signo de número* y ocupando la *posición normal* o «*parte alta de la celdilla Braille*» (puntos 1245).

El *desplazamiento vertical* de los *signos literales* correspondientes a las *cifras del numerador* permite diferenciarlo perfectamente del *denominador*; en consecuencia: prescindir del *signo de dividir* y del *signo de número del denominador*.

Tabla 1-4. Representación braille de fracciones enteras

Tinta	**Braille**	
	Representación	**Códigos**
$\frac{1}{2}$	⠼⠂⠃	3456,2,12
2/3	⠼⠆⠉	3456,23,14
3/4	⠼⠒⠙	3456,25,145
$4 \div 5$	⠼⠲⠑	3456,256,15
5/60	⠼⠢⠋⠚	3456,26,124,245
6/100	⠼⠖⠁⠚⠚	3456,235,1,245,245
7/1000	⠼⠶⠁⠚⠚⠚	...
8/3	⠼⠦⠉	3456,236,14
$\frac{9}{24}$	⠼⠔⠃⠙	3456,35,12,145
10/12	⠼⠂⠴⠁⠃	3456,2,356,1,12
$\frac{1234}{5678}$	⠼⠂⠆⠒⠲⠑⠋⠛⠓	...
$3\frac{1}{4}$	⠼⠉⠼⠂⠙	3456,14,3456,2,145

Esto puede que origine algunas perturbaciones en la comunicación oral en el aula, que no enturbian la claridad y sencillez representativa que aporta esta fórmula: al trabajar simultáneamente *en tinta* y *en Braille*, la expresión *arriba* o *de arriba*, puede inducir a error, según el código empleado; análogamente para *abajo*, *debajo*...

Existen dos grupos de expresiones fraccionarias susceptibles de ser consideradas como *operadores*. Son los llamados *porcentajes* o *tantos por ciento* y los *tantos por mil*. Cuentan también en Braille con una notación específica:

Tabla 1-5. Porcentajes y tantos por mil

Tinta	Equivalencia	Braille	
		Representación	Códigos
$5^{0}/_{0}$	5/100	⠼⠑⠸⠴	3456,15,456,356
$5^{0}/_{00}$	5/1000	⠼⠑⠸⠴⠴	3456,15,456,356,356

Los *conjuntos numéricos elementales* cuentan con una representación simbólica propia, que facilitará en su momento la expresión resumida del campo de validez de ciertas proposiciones relativas a Teoría de Números, Funciones, etc. Brevemente:

Tabla 1-6. Los conjuntos numéricos

Conjunto numérico	Notación Tinta	Braille	
		Representación	Códigos
Naturales	*N*	⠸⠝	456,1345
Enteros	*Z*	⠸⠵	456,1356
Fraccionarios (frac. ent.)	*F*	⠸⠋	456,124
Decimales (finitos)	*D*	⠸⠙	456,145
Racionales	*Q*	⠸⠟	456,12345
Reales	*R*	⠸⠗	456,1235
Complejos	*C*	⠸⠉	456,14

Algunos de estos símbolos tendrán valor polisémico; en concreto, el que designa al conjunto de los *números decimales* -infrecuente, por otra parte-, que coincidirá con el empleado para designar *derivadas parciales*. El contexto toma a su cargo la diferenciación interpretativa.

C) ORDINALES

En Matemática Básica, se identifican *ordinales* y *naturales*, entendiendo los primeros como «*números naturales afectados de género*».

En la práctica también existe una cierta tendencia a identificarlos: los pulsadores de un ascensor, por ejemplo, se marcan con numerales naturales en vez del piso (ordinal) al que conducen; los capítulos de una obra se indican con un número natural, cuando lo lógico sería reflejar su *lugar de orden*; etc.

La representación Braille, atenta a simplificar la expresión, reduciendo el número de caracteres y signos, aprovecha la distinción que supone la «*posición baja de las cifras*» empleada para las *fracciones*:

Tabla 1-7. Representación Braille de ordinales

Tinta	Braille	
	Notación	**Códigos**
1ª	⠼⠂⠁	3456,2,1
1º	⠼⠂⠕	3456,2,135
1er	⠼⠂⠗	3456,2,1235
2ª	⠼⠆⠁	3456,23,1
2º	⠼⠆⠕	3456,23,135
3ª	⠼⠒⠁	3456,25,1
3er	⠼⠒⠗	3456,25,1235
20º	⠼⠆⠴⠕	3456,23,356,135

Se observa que 2ª y 2/1 tendrían en Braille la misma representación, al igual que 3ª y 3/1, 4ª y 4/1, etc. Sin embargo, el contexto deshace inmediatamente el equívoco.

La regla de transcripción es inmediata:

— El *signo de número* (⠼, puntos 3456) aparece al comienzo de la expresión.

— El *número natural correspondiente* se escribe a continuación del *signo de número*, y ocupa la «*parte inferior de la celdilla Braille*» (puntos 2356); lo que corrientemente se expresa como *posición baja*.

— El género se expresa mediante una única letra, y se escribe a continuación, en posición normal (no *volada*):

º → ⠕ (puntos 135); ª → ⠁ (punto 1); er → ⠗ (puntos 1235).

D) NUMERACIÓN ROMANA

La *numeración romana* puede decirse que se halla hoy día al margen de la Matemática. Persiste como forma de expresión ordinal, ligada a nombres propios de monarcas o papas, numeración de siglos y capítulos, fases de procesos, fechas de edificios, etc. Ha quedado, sin embargo —desde hace cinco siglos— fuera del ámbito del cálculo.

La representación Braille se ajusta a la transcripción literal. Pero se suprime el prefijo de mayúscula, salvo el que precede a la primera letra-número. Cierto que también éste podría suprimirse, ya que no hay ocasión para el equívoco; mas respetemos la norma.

Tabla 1-8. Numeración romana

Valor	**Notación Tinta**	**Braille**	
		Representación	**Códigos**
1	I	⠨⠊	46,24
5	V	⠨⠧	46,1236
10	X	⠨⠭	46,1346
50	L	⠨⠇	46,123
100	C	⠨⠉	46,14
500	D	⠨⠙	46,145
1000	M	⠨⠍	46,134
1999	MCMXCIX	⠨⠍⠉⠍⠭⠉⠊⠭	…
6789	VIDCCLXXXIX	⠨⠧⠊⠒⠙⠉⠉⠇⠭⠭⠭⠊⠭	…, 25, …
2.135.412	IICXXXVCDXII	⠨⠊⠊⠒⠒⠉⠭⠭⠭⠧⠒⠉⠙⠭⠊⠊	…, 25,25, …

La representación de *millares* mediante «*una barra superior*», o la de *millones* mediante «*dos barras superiores*», pueden considerarse como *restos paleo-matemáticos*. En Braille, no obstante, también se ha previsto su expresión afectando *a posteriori* la letra o grupo de letras por uno o dos signos de «*dos puntos*» (puntos 25 o 25,25) respectivamente. El riesgo de confusión con el signo ortográfico es irrelevante.

1.2. OPERACIONES ARITMÉTICAS

Históricamente, las primeras *operaciones* aparecen entre *números naturales*, *fraccionarios*... Las *operaciones aritméticas*, que pertenecen a una amplia familia de objetos matemáticos: las *leyes de composición interna* (Sección 2.1).

En rigor -estructural-, sólo debería hablarse de dos: *adición* y *multiplicación*, ya que la *sustracción* y la *división* quedarían relegadas a *formas inversas* de aquéllas (*operación con el simétrico*), y ni siquiera se hacen acreedoras a la definición formal para ciertos dominios numéricos (N, por ejemplo). Pero ni se precisaron formalismos tales antes de la segunda mitad del siglo XX, ni los precisan hoy los estudiantes en niveles elementales de enseñanza.

Por «*operaciones aritméticas*» se entienden *suma*, *resta*, *multiplicación* y *división*; definidas de forma coherente para los principales conjuntos numéricos (N, Z, Q, R, C). Entendiendo por *coherente* -o *consistente*- que el resultado de operar dos números cualesquiera en estos dominios es idéntico con independencia del dominio al que puedan considerarse pertenecientes (por ejemplo: $2+4$ será igual a 6, consideremos 2 y 4 como *números naturales*, sus correlativos $+2$ y $+4$ como *números enteros*, 2/1 y 4/1 como *números racionales*, etc.).

A partir del siglo XVI-XVII, se tiende a emplear signos especiales para representar estas operaciones:

$$\mathrm{N} \times \mathrm{N} \rightarrow \mathrm{N}$$

$$\text{suma } (8, 2) \xrightarrow{+} 8 + 2 = 10$$

$$\text{resta } (8, 2) \xrightarrow{-} 8 - 2 = 6$$

$$\text{multiplicación } (8, 2) \xrightarrow{\times} 8 \times 2 = 16$$

$$\text{división } (8, 2) \xrightarrow{\div} 8 \div 2 = 4$$

Desde los primeros momentos, se asignaron notaciones Braille para estos símbolos. Evolucionarían a lo largo del tiempo, hasta quedar simplificados en la forma actual.

Tabla 1-9. Signos de operaciones aritméticas

Operación	Notación Tinta	Braille	
		Notación	Códigos
Suma	+	⠖	235
Resta	–	⠤	36
Alternativa de suma algebraica	±	⠖⠒⠤	235,25,36
Multiplicación	×	⠦	236
	·	⠦	236
		⠄	3
División	÷	⠲	256
	:	⠲	256
	/	⠠⠂	6,2

Las notaciones para *multiplicación* y *división* que figuran en primer lugar puede decirse que son las *usuales*. El «*punto*» para la *multiplicación* es más propia del cálculo algebraico y la «*barra*» para indicar la *división* se emplea casi exclusivamente con *fracciones*. En Braille, por razones de sencillez didáctica, suele emplearse casi exclusivamente la primera de ellas, si bien las *fracciones numéricas* contarán con una *versión simplificada* (ver Apartado 1.1B).

Junto con las *operaciones* aparecen las «*relaciones numéricas*», expresivas de la *igualdad/desigualdad* de resultados o de su *conformidad/disconformidad* con el *orden natural* definido en el correspondiente conjunto numérico (N, Z, Q, R).

Tabla 1-10. Signos de relación en los conjuntos numéricos

Relación	**Notación Tinta**	**Braille**	
		Notación	**Códigos**
igualdad	$=$	⠶	2356
desigualdad	$\neq$	⠘⠶	45,2356
equivalencia	$\equiv$	⠶⠶	2356,2356
menor que	$<$	⠪	246
menor o igual que	$\leq$	⠪⠶	246,2356
no menor que	$\not<$	⠘⠪	45,246
no menor ni igual que	$\not\leq$	⠘⠪⠶	45,246,2356
mayor que	$>$	⠕	135
mayor o igual que	$\geq$	⠕⠶	135,2356
no mayor que	$\not>$	⠘⠕	45,135
no mayor ni igual que	$\not\geq$	⠘⠕⠶	45,135,2356
mucho menor que	$<<$	⠪⠪	246,246
mucho mayor que	$>>$	⠕⠕	135,135
aproximadamente igual a	$\cong$	⠈⠶	4,2356
a divisor de b	$a\|b$	⠁⠸ ⠃	.,456,0,.
a divisor primo de	$a \propto b$	⠁⠸⠲⠃	.,456,256,.
múltiplo de 6	$\dot{6}$	⠈⠼⠋	4,3456,...
múltiplo de P	P	⠈⠨⠏	4,46,...
múltiplo de p	$\dot{p}$	⠈⠐⠏	4,5,...
valor absoluto de z	$\|z\|$	⠸ ⠵⠸	456,0,.,456
valor absoluto de la diferencia	$a \div b$	⠈⠨⠤⠃	..,46,36,..

Se ha aprovechado este lugar para incluir notaciones de relaciones varias y operadores ligados a las estructuras aritméticas y de orden. Todas ellas serán extensivas al dominio del Álgebra (Capítulo 2).

En el Cálculo Aritmético (y en el Algebraico) hay que distinguir dos aspectos:

— La expresión de los *cálculos a realizar*, o escritura en línea de las *operaciones* a las que se someten los *varores mencionados*. Y

— La *realización de los cálculos*, propiamente dicha; que, con frecuencia, se lleva a cabo mediante un *algoritmo* de expresión bidimensional.

Cuando varios *operandos* (*valores numéricos*, en este caso) se encuentran sometidos a diversas *operaciones*, debe plasmarse por escrito el *orden en que han de realizarse*. Esto se logra mediante dos recursos:

a) Una *prioridad convenida* entre las *operaciones aritméticas*: ^{n} (potencia) ó $\sqrt{\ }$ (raíz), **X** ó ÷, **+** ó **–.**

b) Los *paréntesis*, que reclaman prioridad para la/s expresiones que encierran. Pueden coexistir pluralidad de ellos en una expresión, con tres *reglas*:

1ª) todo paréntesis que se abre, debe cerrarse;

2ª) a la *apertura de paréntesis* -(- sólo puede suceder *una cantidad*, los signos de **+** ó **–, u otra apertura de paréntesis**;

3ª) al *cierre de paréntesis* sólo puede anteceder una *cantidad* u **otro cierre de paréntesis**.

Algunas ediciones o autores siguen empleando *variantes del paréntesis*: *corchetes* **[**...**]**, *llaves* {...} u otras. En la actualidad, y para facilitar sobre todo el trabajo con calculadora o en editores de programas de cálculo, se tiende a utilizar el *paréntesis curvo* como modelo único.

Tabla 1-11. Paréntesis matemáticos en braille

Tinta		abrir (	cerrar)	Abrir (sin equivalencia)	cerrar (sin equivalencia)
Braille	Notación	⠣	⠜	⠢	⠔
	Códigos	126	345	26	35

En la Sección 2.2 se justifica la necesidad de este «*paréntesis específico del Braille*» o «*paréntesis auxiliar*», que permita -entre otras finalidades- distinguir *numeradores* y *denominadores* cuando éstos, a su vez, sean *expresiones complejas*.

Para la realización de un cálculo suele recurrirse a tres métodos, supuesta la disponibilidad de los medios oportunos:

a) cálculo «*pensado*» o «*mental puro»;*

b) recurso a instrumentos especiales: ábacos, calculadoras, programas informáticos, etc.;

c) *algoritmos* o «*series de reglas*» para la obtención por escrito de resultados, basados en:

— la escritura numérica posicional,

— las propiedades estructurales y

— ciertos resultados *elementales* automatizados.

En las páginas que siguen, se presentan los algoritmos escritos que en la actualidad más se emplean en España. No se entra en su justificación matemática.

El cálculo aritmético ha supuesto una dificultad suplementaria no pequeña para el estudiante ciego. La buena voluntad de los profesionales encargados de su educación han procurado a lo largo del último siglo y medio diversas soluciones, ideando dispositivos adaptados o recurriendo incluso a procedimientos tradicionales -ábaco chino-japonés-; lo que se ha dado en llamar «*instrumental de cálculo para ciegos*». Desde los diversos modelos de «*imprentillas*» o «*composiciones de tipos*» hasta los *ábacos* o la *calculadora parlante*.

Conviene destacar que en su mayoría se pretendía remedar el *cálculo con lápiz y papel*, en la esperanza de aprovechar los algoritmos eficaces en tinta. Al poseer todos ellos un fuerte componente *bidimensional*, constan de una «matriz» en la que se distribuyen o generan «tipos» móviles o modificables. Surgen así el «cubaritmo» (Francia), la «caja de Aritmética» (España), la «dattiloritmica» (Italia); trabajando con *tipos Braille* (para España, la «caja modelo B», aunque en desuso), con la sana intención didáctica de indultar al alumno de la necesidad de aprender un código adicional con fines limitados.

Como se mencionaba en la Introducción, el instrumental de escritura Braille tradicional (*pautas*, *regletas*) no permitiría abordar satisfactoriamente *la cuestión del cálculo*. Para llevar a cabo una operación de dimensiones apreciables, que superan la capacidad de memoria, es preciso consultar de continuo datos y resultados parciales; lo que implica disponer de ellos en un continuo *al alcance de la mano*, sin necesidad de *tornar el papel*. Es decir: se precisaba un útil capaz de que los puntos Braille surgieran *hacia arriba*, inmediatamente legibles; lo que hemos llamado «*punto positivo*» (máquinas de escribir *Erika*, *Perkins*, etc.).

En la máquina Perkins pueden realizarse rápida y cómodamente todos los cálculos aritméticos; previo el oportuno entrenamiento -claro está- y ciertas convenciones simplificativas y de estructuración espacial.

1.2.1. OPERACIONES CON ENTEROS

Los algoritmos tradicionales para las operaciones aritméticas se basan de forma esencial en la descomposición polinómica de un número en *base 10*; o, lo que es lo mismo: la *escritura posicional*. Se satisfacen tres propósitos decisivos:

a) reducir el cálculo entre cualesquiera cantidades a *cálculos elementales*, merced a las propiedades estructurales (asociatividad, distributividad, etc.);

b) posibilitar la comprobación y repaso (facilitar la detección de errores);

c) transformar la mayoría de las reglas del algoritmo en esquemas y órdenes espaciales simples, fáciles de asimilar y fijar.

Al trabajar con la máquina Perkins, quedan posibilitados estos objetivos. Pero no podemos conformarnos con la simple reproducción del *algoritmo en tinta*: debemos intentar *simplificar* y *clarificar* las tareas que naturalmente se complejizan en Braille, debido a la escasez y homogeneidad de sus símbolos y a las limitaciones de la exploración háptica.

Han surgido así ciertas alteraciones de lo que podríamos llamar *rigor transcriptor* que, sin peligro de error o confusión -gracias, siempre, al contexto-, facilitan la ejecución de los cálculos.

Conviene recordar que **el Braille es un convenio,** no sólo en su código, sino también en sus *reglas expresivas*.

Para las cuatro operaciones tradicionales, tenemos:

Tabla 1-12. Suma de enteros: realización en Braille

$$\begin{array}{r} 12345 \\ +\ \ 9876 \\ 24680 \\ \hline 46901 \end{array}$$

$$12345 + 9876 + 24680 = 46901$$

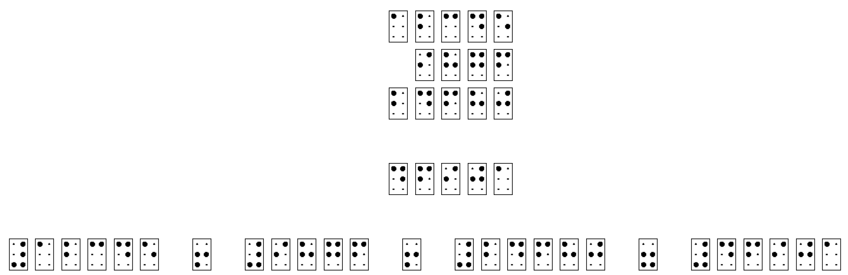


Tabla 1-13. Resta de enteros: realización en Braille

$$\begin{array}{r} 13579 \\ -\ \ 8642 \\ \hline 4937 \end{array}$$

$$13579 - 8642 = 4937$$

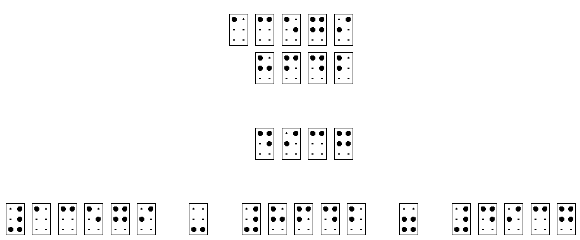


Tabla 1-14. Multiplicación de enteros: realización en Braille

65432 × 9087 ——— 458024 523456 5888880 ——— 594580584 65432 × 9087 = 594580584
⠋⠑⠙⠉⠃ ⠊⠚⠓⠛ ⠙⠑⠓⠚⠃⠙ ⠑⠃⠉⠙⠑⠋ ⠑⠓⠓⠓⠓⠓⠚ ⠑⠊⠙⠑⠓⠚⠑⠓⠙ ⠼⠋⠑⠙⠉⠃ ⠦ ⠼⠊⠚⠓⠛ ⠶ ⠼⠑⠊⠙⠑⠓⠚⠑⠓⠙

Tabla 1-15. División de enteros: realización en Braille

134539 | 24 145 5605 139 19 134539 = 24 × 5605 + 19
⠁⠉⠙⠑⠉⠊ ⠃⠙ ⠁⠙⠑ ⠑ ⠁⠉⠊ ⠋⠚ ⠁⠊ ⠑ ⠼⠁⠉⠙⠄⠑⠉⠊ ⠶ ⠼⠃⠙ ⠦ ⠼⠑⠄⠋⠚⠑ ⠖ ⠼⠁⠊

Obsérvese cómo en la división se ha introducido un cambio sustancial: las cifras del cociente aparecen *escritas en columna*. Se pretende con ello salvar el inconveniente de *retornar a una línea anterior*, a la par de disponer de *la nueva cifra del cociente* en *la misma que se efectúan los cálculos*. Cierto que esta encolumnación se rompe localmente en caso de ser 0 la cifra siguiente, pero la contigüidad evita omitirla en la lectura final necesaria para reescribir la operación *en línea*.

No es difícil rediseñar soluciones prácticas para otros algoritmos derivados:

Tabla 1-16. Descomposición en factores primos

13590	2
6795	3
2265	3
755	5
151	151
1	

$$13590 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 151$$

⠁⠉⠑⠊⠚

⠋⠛⠊⠑ ⠃

⠃⠃⠋⠑ ⠉

⠛⠑⠑ ⠉

⠁⠑⠁ ⠑

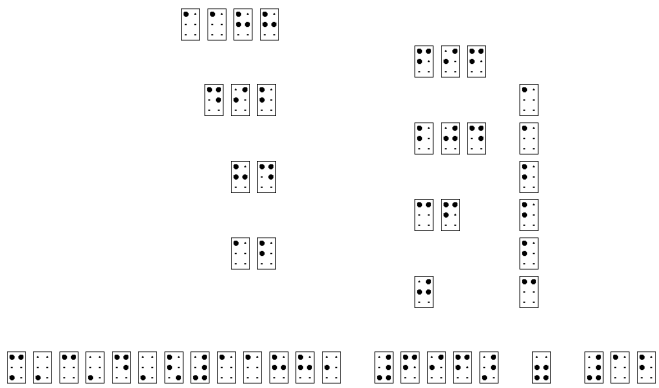
⠁ ⠁⠑⠁

⠼⠁⠉⠄⠑⠊⠚ ⠶ ⠼⠃⠦⠼⠉⠡⠼⠃⠦⠼⠑⠦⠼⠁⠑⠁

Tabla 1-17. Algoritmo de Euclides para la obtención del m.c.d.

	1	1	2	2	2	3
1188	696	492	204	84	36	12
	492	204	84	36	12	0

m.c.d. (1188,696) = 12



REALIZACIÓN EN BRAILLE DE OPERACIONES ARITMÉTICAS CON NÚMEROS ENTEROS Criterios de simplificación y configuración
A) Expresiones *en línea*: 1º La expresión *lineal* de una operación aritmética con números enteros se ajusta a los criterios generales o editoriales de transcripción. 2º (Opcional). Para mayor claridad y distinción de miembros/términos, pueden intercalarse *espacios en blanco*: — Antes y después del *signo igual* **=** (⠶, puntos 2356). — Antes y después de los *signos de operación*.
B) Expresiones *bidimensionales*: 1º Se omite el *signo de número* (⠼, puntos 3456 a anteponer a la expresión literal). Ya que la condición de *cantidad* viene dada por el contexto operativo aritmético. 2º Se omite el *signo de operación*. 3º Las habituales *líneas de separación* en tinta se sustituyen por *líneas en blanco*.

4º Se conserva esencialmente la configuración espacial de la expresión *en tinta*; excepción hecha de la *división*, en la que el *cociente* se escribe progresivamente *en columna*, salvo que la correspondiente difra sea **0** (cero), en cuyo caso *se adjuntaría en la misma línea que la anterior*.

5º (Opcional). Se agrega la expresión *lineal* de la operación realizada, que explicite los significados contextuales, al tiempo que se facilitan relecturas simples.

La omisión del *signo de operación*, señalado en 2º, también es frecuente *en tinta*, más por olvido que por razones de sencillez -aunque tal *olvido* sería un indicio de redundancia-. Para el Braille, nos apoyamos de nuevo en razones contextuales, si bien existe un motivo de claridad, para evitar confusiones entre *signo de operación* (*«posición baja»)* y cifra (*«posición alta»)*, aunque estuvieran separados por *espacio en blanco*.

La razón de sustituir las *líneas de separaciión* en tinta por *líneas en blanco* en Braille, indicado en 3º, es doble: aligerar la información Braille de elementos superfluos y ahorrar tiempos/energía de confección; aun puede aportarse una tercera: facilitar la lectura de datos -separándolos de resultados parciales o final y desplazándolos verticalmente de las posiciones a ocupar por la *cabeza impresora* (véase: división).

La propuesta opcional de adjuntar la *expresión en línea* de la operación, permitirá que, para la división, en particular, el *cociente* aparezca escrito correctamente, como una *cantidad en cifras contiguas*.

1.2.2. OPERACIONES CON FRACCIONES ENTERAS

En tinta, al operar con fracciones enteras se llevan a cabo algoritmos *lineales en apariencia*. Las fracciones se escriben *en línea –primer espejismo-*; pero las *reglas algorítmicas* hacen referencia -en su enunciado y ejecución- a términos, de hecho, *espaciales*: *numerador*, *denominador*, *de la primera*, *de la segunda*, *en cruz*... Y es que **las fracciones son expresiones efectivamente bidimensionales.**

Al intentar traducir tales expresiones espaciales -del lenguaje oral o manipulativo- al contexto de la representación Braille ordinaria (exclusivamente lineal) se tropieza con dificultades notables, debiendo reconocerse los términos de las fracciones *en su concepto* y no *en su posición relativa*. Quedando tergiversada, en suma, gran parte de la formulación algorítmica ordinaria.

No es extraño, pues, que en ciertas notaciones (en desuso) se representaran en Braille las fracciones siguiendo la regla «arriba-abajo»; es decir: *numerador en posición ordinaria*, *denominador en posición baja*; reservando un *espacio en blanco* para separar éste de cualquier otro signo que pudiera inducir a error.

Un análisis somero de la *regla de transcripción* empleada nos sugiere una simple transformación espacial, que devuelve el cálculo de fracciones en Braille a los términos de sencillez en tinta.

La disposición «arriba-abajo» de una fracción *en tinta* se refleja en Braille como «antes-después» o «izquierda-derecha». Así pues:

Para la realización de operaciones en Braille, si se escriben las fracciones *en columna*, se obtiene una correspondencia espacial (vertical) *numerador-numerador* y *denominador-denominador*

Bien entendido que a los solos efectos de cálculo.

Tabla 1-18. Adición de fracciones: realización en Braille

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{7} + \frac{1}{2} = \frac{21}{8} + \frac{8}{28} + \frac{14}{28} = \frac{43}{28}$$

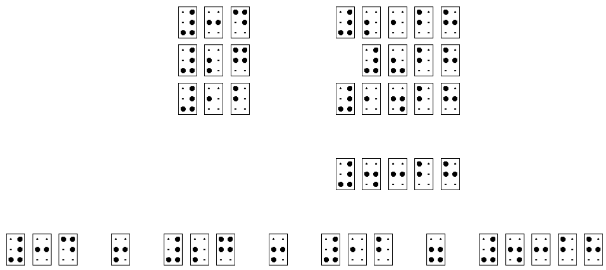


Tabla 1-19. Diferencia de fracciones: realización en Braille

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{7} = \frac{21-8}{28} = \frac{13}{28}$$

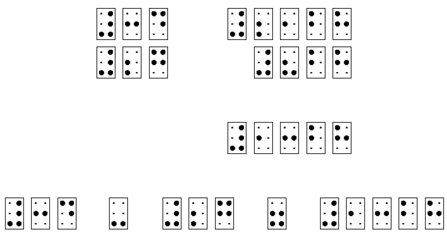


Tabla 1-20. Producto de fracciones: realización en Braille

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$$

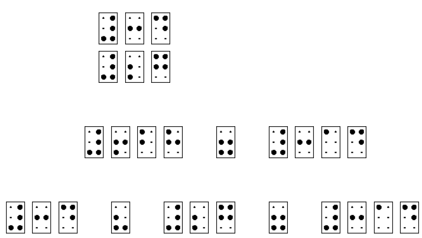
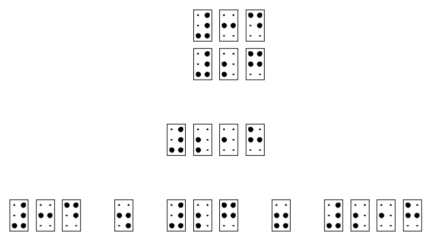


Tabla 1-21. División de fracciones: realización en braille

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{7} = \frac{21}{8}$$



REALIZACIÓN EN BRAILLE DE OPERACIONES CON FRACCIONES ENTERAS

Criterios de simplificación y configuración

A) Operaciones indicadas:

1º La expresión *lineal* de una operación aritmética entre fracciones se ajusta a los criterios generales o editoriales de transcripción.

2º (Opcional) Para mayor claridad y distinción de miembros/términos, pueden intercalarse *espacios en blanco*:

— Antes y después del *signo igual* **=** (⠶, puntos 2356).

— Antes y después de los *signos de operación*.

B) Cálculo efectivo:

1º Las fracciones a operar se escriben *en columna*; preferiblemente, haciendo corresponder la primera cifra de los *denominadores*.

Para ello, basta tener un conocimiento anticipado de las fracciones, o *prever algún espacio en blanco* antes del primer operando.

2º (Opcional) Se omite el *signo de operación*, salvo que se trate de una *operación mixta iterada* (suma algebraica, productos y divisiones, etc.) ya que el contexto aporta información suficiente.

3º Las fracciones a operar se cierran con una *línea en blanco* (ver «operaciones con números enteros»).

4º A) Si se calcula directamente el *resultado* se escribe en la línea inmediata a la citada *línea en blanco* o, preferentemente, a la misma *altura* (línea) que las primitivas, también *en columna*.

4º B) De trasformarse las *fracciones-dato* o la propia *operación* en otras equivalentes, las transformadas pueden escribirse inmediatamente debajo de la *línea en blanco* o a la misma *altura* (línea) que las primitivas, también *en columna*.

5º (Opcional) Se agrega la expresión *en línea* de la operación realizada. Se explicitan así los significados contextuales y se facilitan relecturas simples.

1.2.3. OPERACIONES CON DECIMALES

El cálculo en Braille sobre *«números con coma»* presenta una dificultad importante: *«la «coma» ocupa lugar»* (un *carácter Braille*).

Debido a lo cual, algunos de los algoritmos propuestos en 1.2.1 para el cálculo con enteros sufren una distorsión espacial, inexistente al trabajar con lápiz o bolígrafo (pero sí con un editor PC).

Pasemos revista a las cuatro operaciones básicas.

A) **Adición y sustracción**

Puede mantenerse el algoritmo diseñado para números enteros, sin más que *hacer corresponder en columna las «comas» de los operandos* (*sumandos* o *minuendo* y *sustraendo*, respectivamente); es decir: *respetar los órdenes de unidades*.

Tabla 1-22. Adición de expresiones decimales: realización en Braille

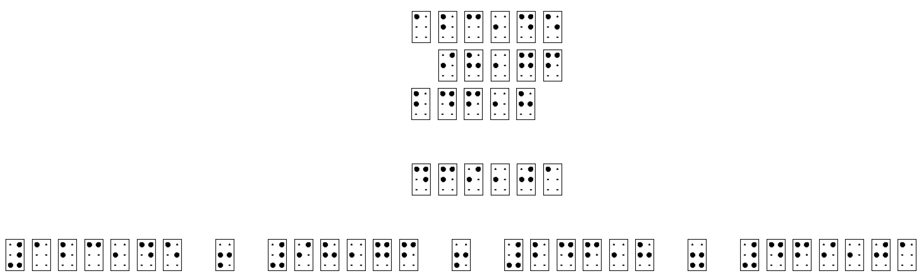
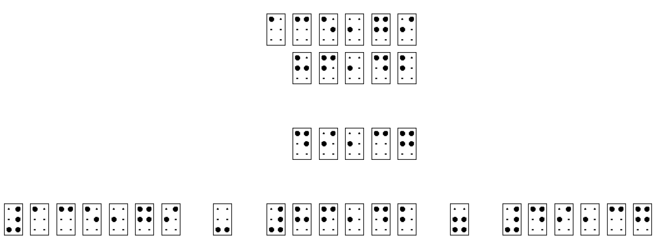
$$\begin{array}{r} 123{,}45 \\ 98{,}76 \\ +\ 246{,}8 \\ \hline 469{,}01 \end{array}$$ $123{,}45 + 98{,}76 + 246{,}8 = 469{,}01$


Tabla 1-23. Sustracción de expresiones decimales: realización en Braille

$$\begin{array}{r} 135{,}79 \\ -\ 86{,}42 \\ \hline 59{,}37 \end{array}$$ $135{,}79 - 86{,}42 = 59{,}37$


REALIZACIÓN EN BRAILLE DE ADICIONES Y SUSTRACCIONES DE EXPRESIONES CON *PARTE DECIMAL*

Criterios de simplificación y configuración

A) Expresiones *en línea*:

1º La expresión *lineal* de una operación aritmética con *números con parte decimal* (*números con coma*) se ajusta a los criterios generales o editoriales de transcripción.

2º (Opcional) Para mayor claridad y distinción de miembros/términos, pueden intercalarse *espacios en blanco*:

— Antes y después del *signo igual* **=** (⠶, puntos 2356).

— Antes y después de los *signos de operación*.

B) Expresiones *bidimensionales*:

1º Se omite el *signo de número* (⠼, puntos 3456 a anteponer a la expresión literal). Ya que la condición de *cantidad* viene dada por el contexto operativo aritmético.

2º Se omite el *signo de operación* (ver «operaciones con números enteros»).

3º La habitual *línea de separación* en tinta se sustituye por una *línea en blanco* (ídem).

4º Se conserva esencialmente la configuración espacial de la operación *en tinta* (encolumnado de *órdenes de unidades*).

5º (Opcional). Se agrega la expresión *lineal* de la operación realizada, que explicite los significados contextuales, al tiempo que se facilitan relecturas simples.

B) **Multiplicación**

Los *productos parciales* se verán afectados por el efecto *columna de la coma*, ya sea del *multiplicando* o del *multiplicador*; y consecuencias más o menos perturbadoras en la *suma/resultado*; las consecuencias y sugerencias de solución Braille serían diferentes según:

— la *complejidad del caso* (*parte decimal* sólo en el *multiplicando*, sólo en el *multiplicador* o en ambos simultáneamente);

— si se obliga o no a mantener una *correspondencia de órdenes de unidades* (encolumnamiento) entre *multiplicando* y *multiplicador*;

— si se desea o no tal correspondencia entre *resultado* y *operando con coma*, en caso de que sólo uno de ellos la contenga;

— si se desea reflejar en cada *producto parcial* el efecto del orden de unidades operado en el *multiplicador*;

— modelo algorítmico seguido (multiplicación de derecha a izquierda en ambos factores —orden creciente; el más común en España—, de derecha a izquierda en el *multiplicador* e inverso en el *multiplicando*...); etc.

Salvo las consecuencias derivadas de la última opción, esta casuística apenas tiene sentido al trabajar en tinta: pueden *insertarse comas a posteriori* en los *productos parciales*, *operandos* y *resultado*; observarse —y dibujarse— la correspondencia/paralelismo entre órdenes de unidades, etc. Pero en Braille debe preverse *dónde irá emplazada la coma en cada fila* (*productos parciales* y *resultado*) y *por qué*.

Podemos imaginar dos soluciones:

a) Analizar cada caso, y diseñar *reglas locales*; quizás pudieran reducirse después a *reglas generales*.

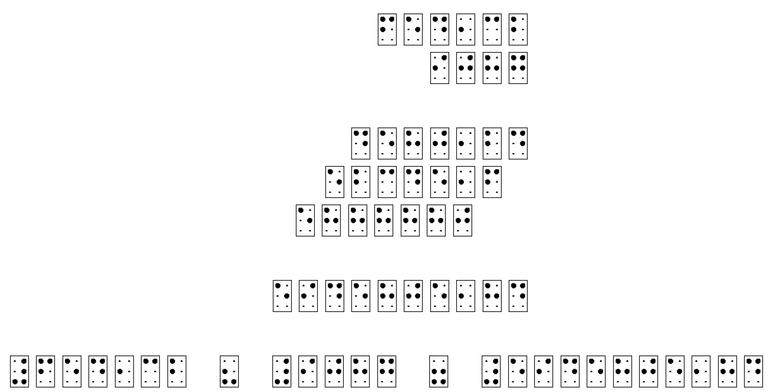
b) Acomodarse al algoritmo en tinta: efectuar la operación como si se tratara de números enteros, y determinar *a posteriori* el *lugar de la coma en el resultado*, reescribiéndolo. Lo que no prejuzga el itinerario didáctico de alumbramiento o justificación de tal *regla general*.

Ésta será la vía propuesta. Tras haber desarrollado la primera, con desenlace negativo, y que no se expone aquí por innecesaria; no obstante, como ilustración, se aportan los ejemplos correspondientes a los casos de un único operando con *parte decimal* y *encolumnamiento de ambos factores por la derecha*:

Tabla 1-24. Multiplicación de expresiones decimales (caso: Parte decimal sólo en el multiplicando)

$$
\begin{array}{r}
654{,}32 \\
\times \quad 9087 \\
\hline
4580{,}24 \\
52345{,}6 \\
5888880 \\
\hline
5945805{,}84
\end{array}
$$

$$654{,}32 \times 9087 \; = \; 5945805{,}84$$

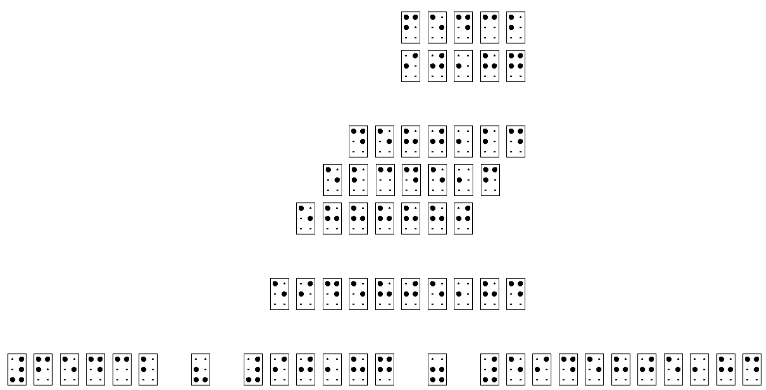


En el primer *producto parcial*, al efectuar los productos cifra a cifra, cuando corresponda la *columna de la coma*, puede **escribirse ésta** o **dejar un espacio en blanco.** Los sucesivos *productos parciales* respetarán dicha *coma;* también en la *suma/resultado*.

Tabla 1-25. Multiplicación de expresiones decimales (caso: Parte decimal sólo en el multiplicador)

```
       65432
   ×   90,87
   ---------
     4580,24
    52345,6
   5888880
  ----------
  5945805,84
```

$65432 \times 90{,}87 = 5945805{,}84$



Poniendo como condición indispensable que las cantidades *multiplicando* y *multiplicador* se encolumnen **por la derecha;** no existirá, pues, *encolumnamiento de unidades* entre ellos.

En el primer *producto parcial*, al efectuar los productos cifra a cifra, cuando llega el momento de multiplicar la cifra del *multiplicando* que se corresponde con la *columna de la coma en el multiplicador*, puede **escribirse ésta** o **dejar un espacio en blanco.** Los sucesivos *productos parciales* **respetarán dicha columna de la coma,** que también lo será en la *suma/resultado*.

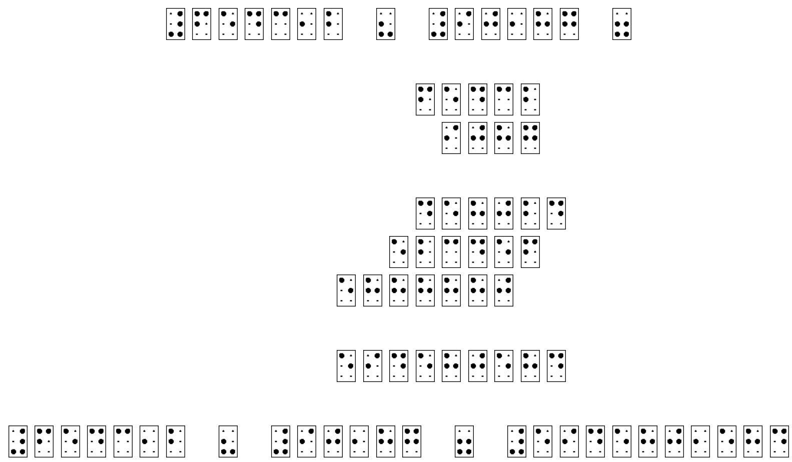
En estos ejemplos, el *lugar de la coma* en los *productos parciales* muestra el efecto del *orden de unidades de la cifra del multiplicador* operada.

Así pues, desechando tales *soluciones parciales*, se traslada a la versión Braille la misma *regla* que para el cálculo en tinta:

Tabla 1-26. Multiplicación de expresiones decimales (CASO GENERAL) Realización en Braille

$$\begin{array}{r} 6543{,}2 \\ \underline{\times\ \ 90{,}87} \\ 458024 \\ 523456 \\ \underline{5888880} \\ 594580{,}584 \end{array}$$

$$6543{,}2 \times 90{,}87 = 594580{,}584$$



Una vez efectuada la multiplicación **ignorando la posición de la coma** en *multiplicando* y *multiplicador*, **se separan** en el *resultado* tantas cifras decimales como indique la suma de las de aquéllos conjuntamente.

Muy pronto, la práctica lleva a situar la *coma* en el lugar oportuno, al tiempo que se efectúa la *suma/resultado*; pese a que origina un desplazamiento de las cifras de la *parte entera* (si se realiza aquélla de derecha a izquierda, como es común en España; o de la *parte decimal*, si se realiza de izquierda a derecha) respecto de la correspondiente columna.

Por otra parte, la demostración (comprobación) es bien simple, sin más que acudir a la expresión fraccionaria:

Transformación de multiplicaciones de expresiones decimales en fraccionarias enteras

$$654{,}32 \times 9087 = \frac{65432}{100} \times 9087 = \frac{594580584}{100} = 5945805{,}84$$

$$65432 \times 90{,}87 = 65432 \times \frac{9087}{100} = \frac{594580584}{100} = 5945805{,}84$$

$$6543{,}2 \times 90{,}87 = \frac{65432}{10} \times \frac{9087}{100} = \frac{594580584}{1000} = 594580{,}584$$

REALIZACIÓN EN BRAILLE DE MULTIPLICACIONES DE EXPRESIONES
CON *PARTE DECIMAL*

Criterios de simplificación y configuración

A) Expresiones *en línea*:

1º La expresión *lineal* de una multiplicación de *expresiones con parte decimal* (*números con coma*) se ajusta a los criterios generales o editoriales de transcripción.

2º (Opcional). Para mayor claridad y distinción de miembros/términos, pueden intercalarse *espacios en blanco*:

— Antes y después del *signo igual* **=** (⠶, puntos 2356).

— Antes y después del *signo de multiplicar* **×** (⠦, *puntos 236).*

B) Expresiones *bidimensionales*:

1º Se omite el *signo de número* (⠼, puntos 3456 a anteponer a la expresión literal). Ya que la condición de *cantidad* viene dada por el contexto operativo aritmético.

2º (Opcional). Se reescriben *multiplicando* y *multiplicador* como *números enteros* (prescindiendo de la *coma*).

3º Se omite el *signo de multiplicar* (ver: «operaciones con números enteros»).

4º Las habituales *líneas de separación* en tinta se sustituyen por *líneas en blanco* (ídem).

5º Se conserva esencialmente la configuración espacial de la multiplicación *en tinta*, como *números enteros* (ignorando *la posición de la coma* en *multiplicando* y *multiplicador*).

6º Se reescribe debajo el *resultado* (de la *multiplicación como números enteros*), situando una coma de forma tal que: el número de cifras de la *parte decimal* sea igual a la suma de cifras decimales de *multiplicando* y *multiplicador*.

7º (Opcional). Se agrega la *expresión lineal* de la operación realizada, que explicite los significados contextuales, y facilitan relecturas simples.

Es indudable que la transformación en *expresiones enteras* facilita notablemente las inevitables revisiones y detección de errores.

Pese al desplazamiento que origina en las cifras situadas *a la izquierda de la coma* respecto de su columna (o a la derecha, según la técnica sumatoria), el paso 6º puede, gracias a la práctica, subsumirse en el 5º.

D) **División**

En tinta, la existencia de *coma* en alguno de los términos se refleja en puntos esenciales de las *reglas* que conforman su algoritmo:

— objetivo: hacer desaparecer —en su caso— *la coma del divisor*;

1ª regla de preparación: «*desplazar la coma en el dividendo tantos lugares como decimales —en su caso— presente el divisor;* si quedaran «huecos», completar con 0;

2ª regla de preparación: si se desea *aproximar el cociente con decimales*, «*añadir en el dividendo los ceros precisos tras la coma, hasta completar dicho número de decimales de aproximación»;*

— desarrollo: cuando fuera preciso *bajar la coma del dividendo* —en su caso—, adjuntarla a la parte del cociente obtenida hasta entonces;

— revisión del *resto*: en su caso, *incluir la coma en el resto*, en el lugar correspondiente a la columna que *ocupaba o debería ocupar originalmente* en el *dividendo*.

De esta forma, la *división con decimales*, y previo el acondicionamiento inicial —si fuera preciso-, se reduce en su ejecutoria a:

Caso único.—División de un *número con parte decimal* entre otro *entero*.

La versión Braille presenta, pues, tres dificultades:

a) Transformaciones -en su caso- de *dividendo* y *divisor*, hasta alcanzar el objetivo del *caso único*.

Con una solución inmediata: puesto que se trata de un acondicionamiento previo de los términos, basta con reescribir la nueva forma:

Tabla 1-27. División de expresiones decimales. Ejemplos de transformación de términos

456789 ÷3,21 = 45678900 ÷321
⠼⠙⠑⠋⠛⠓⠊ ⠲ ⠼⠉⠂⠃⠁ ⠶ ⠼⠙⠑⠋⠛⠓⠊⠚⠚ ⠲ ⠼⠉⠃⠁
456789 ÷321 = 456789,00 ÷321
⠼⠙⠑⠋⠛⠓⠊ ⠲ ⠼⠉⠃⠁ ⠶ ⠼⠙⠑⠋⠛⠓⠊⠂⠚⠚ ⠲ ⠼⠉⠃⠁
4567,89 ÷32,1 = 45678,9 ÷321
⠼⠙⠑⠋⠛⠂⠓⠊ ⠲ ⠼⠉⠃⠂⠁ ⠶ ⠼⠙⠑⠋⠛⠓⠂⠊ ⠲ ⠼⠉⠃⠁

b) Inclusión de la *coma* en el *cociente*.

Puesto que se ha optado —para la división de enteros— por su *escritura en columna*, la solución adecuada sería *adjuntarla a la última cifra de su parte entera*. Coincide con el momento de *alcanzarla en el dividendo*; a la par que permite proseguir en *la misma línea*, si es **0** la siguiente cifra del *cociente*.

c) Inserción/presencia de la *coma* en el *resto* (y, si se desea, en los *dividendos parciales*); o, lo que es lo mismo: dificultades de encolumnación en el desarrollo de los *restos/dividendos parciales*.

Se sugieren dos soluciones:

— Respetar la *columna de la coma* en cada *resto/dividendo parcial*; sea representándola, sea respetando su *espacio en blanco*. Lo que introduce discontinuidad en las expresiones de éstos, pero asegura tanto *la posición de la coma en el resto* (respecto del *dividendo transformado*, en su caso) como *la correcta encolumnación de las cifras del dividendo que se bajan o consideran en cada paso*.

— Ignorarla —en cada *resto/dividendo parcial*—, e incluirla finalmente en el *resto de la división*, si se precisa. El principal obstáculo se presenta al *romperse el encolumnamiento de las cifras que en el dividendo siguen a la coma* respecto de sus *copias en los dividendos parciales*.

En ambas, la *posición de la coma en el resto de la división* será tributaria de las transformaciones de los términos iniciales; en particular, del *dividendo*. Así pues, deberá ajustarse aquélla, tomando como referente *la columna que ocupaba en el dividendo propuesto*. De aquí que es importante mantener *la columna de la coma* a través de los *restos/dividendos parciales*, facilitando el *ascenso* hasta el *dividendo transformado* y, de éste, al *propuesto*.

La razón de «*menores riesgos de error procedimental*» ha sido decisiva para preferir la primera de las soluciones, junto con su «*mayor contenido matemático*».

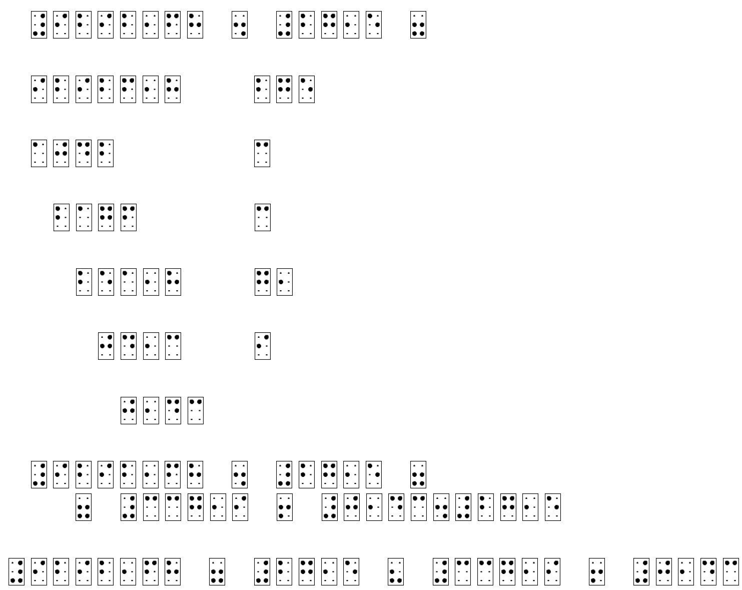
Tabla 1-28. División de expresiones decimales: realización en Braille

9292,68 ÷27,5 =

```
 92926,8 | 275
 1042    |------
   2176     337,9
     251,8
       04,3
        0,43
```

9292,68 ÷27,5 = 337,9 + 0,43 ÷27,5

9292,68 = 27,5 × 337,9 + 0,43

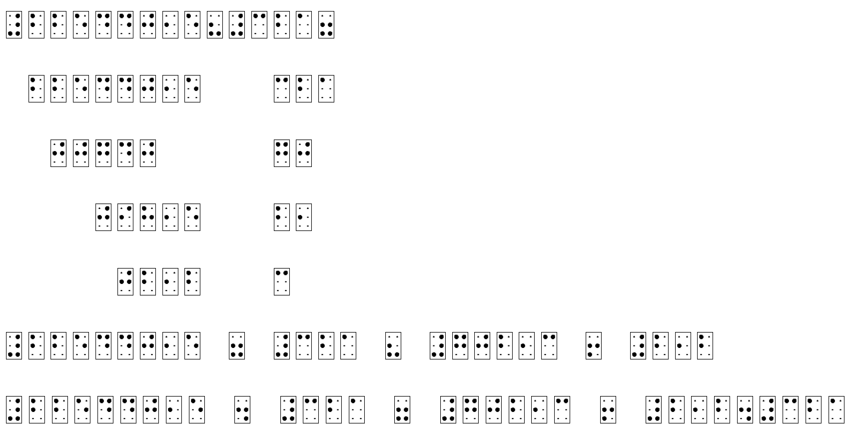


225440,5 ÷321 =

```
225440,5 | 321
00740    |------
   098,5   702,3
    02,2
```

225440,5 = 321 × 702,3 + 2,2

225440,5 ÷321 = 702,3 + 2,2 ÷321



REALIZACIÓN EN BRAILLE DE DIVISIONES DE EXPRESIONES
CON *PARTE DECIMAL*

Criterios de simplificación y configuración

A) Expresiones *en línea*:

1º La expresión *lineal* de una división entre *expresiones con parte decimal* (*números con coma*) se ajusta a los criterios generales o editoriales de transcripción. En concreto, para la *división*, podrá ser:

a) dividendo = divisor × cociente + resto

b) dividendo ÷divisor = cociente + resto ÷divisor

2º (Opcional). Para mayor claridad y distinción de miembros/términos, pueden intercalarse *espacios en blanco*:

— Antes y después del *signo igual* **=** (⠶, puntos 2356).

— Antes y después de los *signos de operación*.

B) Expresiones *bidimensionales*:

1º Se omite el *signo de número* (⠼, puntos 3456) a anteponer a la expresión literal, al reconocerse ésta como *cantidad* por el contexto operativo aritmético.

2º A) Se escribe la *división indicada*, con los términos/dato (signo de dividir: ⠲, puntos 256).

2º B) Si existiera *coma en el divisor* o si fuera preciso *aproximar el cociente con más cifras decimales de las presentes en el dividendo*, se escriben los *términos transformados* de la *división equivalente* bajo los de la propuesta respetando una *línea en blanco*, de forma que *sólo exista coma —en su caso— en el dividendo*.

3º Se omite el *signo* o *caja de la división*. En su lugar, se respetan varios *espacios en blanco* entre *dividendo* y *divisor*.

4º Se efectúa la división. Mientras *queden cifras por considerar en el dividendo*:

— Se toman —bajan— *una a una* las cifras del *dividendo*, escribiéndolas **en la misma línea del resto anterior** y **misma columna que ocupan en aquél.**

— Si se tratara de la *coma*, **se escribe tanto en el cociente como en el resto/dividendo parcial,** y se añade a éste la cifra siguiente (lo que implica *respetar el «espacio/columna» en el resto/dividendo parcial*.

— Se calcula la correspondiente *cifra del cociente*, y se escribe progresivamente *en columna* bajo el *divisor*. Eventualmente: si fuera 0, ésta se sitúa **en la misma línea que la anterior.**

— Calculando la diferencia entre el *resto/dividendo parcial* y el producto de *la nueva cifra del cociente* por el *divisor*, se escribe bajo aquél, **respetando una línea en blanco, y observando columnas/órdenes.**

5º Se procede a ajustar el *resto* conforme a *la posición de la coma en el dividendo original* —primera línea—; reescribiéndolo, si fuera preciso.

6º (Opcional). Se agrega la expresión *lineal* de la división realizada, que explicite los significados contextuales, al tiempo que se facilitan relecturas simples.

En particular, en esta *expresión lineal resumen*, **el valor del cociente aparece como cantidad en cifras contiguas y la posición definitiva de la coma en el resto.** Los términos/dato *dividendo* y *divisor* serán los *propuestos*, no los *transformados*.

De ser necesario aplicar el paso 2°B, la correspondencia entre términos de las *divisiones propuesta y transformada* será conveniente que respete, esencialmente, *el encolumnamiento de la «primera cifra significativa del dividendo»*. La posición de la *coma* en el *dividendo propuesto* será decisiva para la posición de la coma en *el resto de la división*.

1.3. **CÁLCULOS ITERADOS**

Ciertos objetos matemáticos se obtienen como resultado reiterado de una transformación u operación aritmética, dando lugar a una *colección de números* o a un *resultado concreto*. Los primeros forman parte de un grupo más amplio: el de las *sucesiones*; su estudio corresponde más bien al capítulo de las *funciones*, pero parece preferible considerarlos en este Apartado, por su sencillez y frecuencia y, sobre todo, por contar con una notación propia. Asimismo los segundos, aun tratándose de *operadores* o *funcionales* —en enfoque más amplio—; se incluyen aquí por los mismos motivos.

a) Sucesiones. Colecciones ordenadas de números de cualquier tipo. Se representan entre paréntesis, separando sus términos por comas:

$$(1, 3, 0, {}^{1}/_{2}, -1, -1, 0, {}^{1}/_{2}, 3 \ldots)$$

Aunque la formación de sus términos no tiene por qué ajustarse a leyes o fórmulas determinadas, existen tipos singulares con notación propia:

— Progresiones aritméticas: cada término se obtiene del anterior mediante la adición de una cantidad fija (positiva o negativa), llamada *diferencia* o *razón aritmética*:

$$(2, 5, 8, 11 \ldots)$$

$$(3, 1{,}5, 0, -1{,}5 \ldots)$$

— Progresiones geométricas: cada término se obtiene del anterior multiplicándolo por una cantidad fija (mayor o menor que 1, positiva o negativa), llamada *razón*:

$$(3, 6, 12, 24 \ldots)$$

$$(3, 3/2, 3/4, 3/8 \ldots)$$

$$5, -10, 20, -40 \ldots)$$

b) Resultados por reiteración de una operación. Como ejemplos más comunes, tenemos:

— Factoriales: producto reiterado y descendente -unidad a unidad- a partir de un cierto valor:

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24;\ 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120.$$

— Números combinatorios: con significado propio, algunos casos son expresables como cálculo de *factoriales*:

$$\mathrm{comb}(5, 3) = 5 \times 4 \times 3/3! = 5!/(3! \times 2!)$$

— Sumatorios: representaciones abreviadas de sumas de términos expresables mediante una fórmula o *función* del *índice de sumación*:

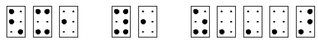
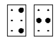
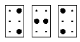
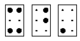
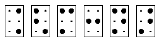
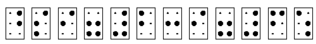
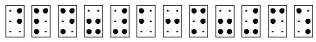
$$Si = 2{,}6\ 3i^2 = 3 \times 2^2 + 3 \times 3^2 + 3 \times 4^2 + 3 \times 5^2 + 3 \times 6^2 = 270$$

— Productorios: representaciones abreviadas de productos de términos expresables mediante una fórmula o *función del índice*:

$$Pn = 2{,}6\ 3n^2 = 3 \times 2^2 \times 3 \times 3^2 \times 3 \times 4^2 \times 3 \times 5^2 \times 3X6^2 = 125.971.200$$

En Braille, están previstas las correspondientes notaciones. Bien que, en el caso de los *números combinatorios*, *sumatorios* y *productorios* es preciso acomodar la bidimensionalidad de la escritura en tinta a la estricta linealidad de la escritura Braille.

Tabla 1-29. Sucesiones y cálculos iterados

Concepto	**Notación Tinta**	**Braille**	
		Notación	**Códigos**
Sucesión	(x,y,z)		126,.,2,0,..,345
Progresión aritmética	:–		46,25
Progresión geométrica	:–:		46,25,13
Factorial	x!		...,45,3
Número combinatorio	$\binom{m}{n}$		46,126,.,25,.,345
Sumatorio	$\sum_{i=2}^{i=6}$		45,234,..., 156
Productorio	$\prod_{n=2}^{n=6}$		45,1234,...,156

1.4. UNIDADES Y MEDIDAS

Una de las partes o ramas que pueden considerarse en Matemática es la *Teoría de la Medida*; también en Matemática Básica, aunque ni reciba este nombre ni sea preciso aludir a él.

Una *medida* es, en esencia, la expresión cuantitativa de una *comparación*; en particular: una *valoración numérica* de *los objetos pertenecientes a una familia*.

Formalmente, podría definirse como: un «par» integrado por un «conjunto» o «espacio» dotado de una cierta estructura, y una correspondencia definida sobre dicho «conjunto« o «espacio» en otro conjunto, dotado a su vez de estructura algebraica. Las ampliaciones multidireccionales del concepto de *medida* a lo largo de los últimos dos siglos han ido ampliando su campo de definición —su concepto—, generalizándolo; para ello se han modificado —reducido— las condiciones exigibles:

— en la estructura del dominio de definición (*conjunto medible*)

— en el *campo de valores* (*números reales positivos, medidas negativas, medidas vectoriales*...)

— las propiedades a satisfacer por la *medida* o correspondencia establecida entre uno y otro en relación a sus respectivas estructuras algebraicas.

En el concepto clásico, *medida* es sinónimo de *comparación con la unidad*. Supone, pues, la definición de tal *unidad*, como *objeto modelo* de la familia considerada. Por consiguiente, a cualquier objeto de dicha familia le corresponde un *valor numérico* dependiente de *la unidad* elegida: a distintas *unidades*, es de esperar resulten *medidas* diferentes; lo serán no sólo en su *parte numérica*, ya que la *unidad elegida* es inseparable de la *medida* en su integridad. Será imprescindible, por tanto, recoger la mención de dicha *unidad* en la expresión final de la *medida*; lo que de ordinario se hará por convenio en forma resumida o simbólica: la llamada *parte literal*.

Para una misma *magnitud* o *familia de objetos sobre los que se define una medida*, la *unidad de referencia* o *unidad-base* ha evolucionado a lo largo del tiempo, aun manteniéndose la *técnica* o *conservación de propiedades estructurales*. Por una parte, y apoyadas en éstas, se toman *unidades-múltiplo* o *unidades-submúltiplo* de la primitiva, buscando expresiones más simples para la *parte numérica*, que se ve afectada en proporción inversa a la variación experimentada por la *unidad elegida*. Por otra parte, se definen nuevas *unidades-base*, más adecuadas a cálculos o transformaciones ulteriores.

Se consideran aquí las *magnitudes* y *unidades* más usuales en la Matemática General y Aplicada dentro de los tópicos de los niveles elemental y medio de enseñanza. A efectos de notación específica sólo nos interesan dos grandes grupos:

a) medidas geométricas, como subtipo de las *medidas abstractas*; y

b) resultados de mediciones físico-químicas, subtipo de las *medidas materiales*.

1.4.1. MEDIDAS DE MAGNITUDES GEOMÉTRICAS

En la Geometría Euclídea del Plano se estudian, esencialmente, tres familias de objetos a medir, con sus correspondientes *medidas*:

— *segmentos lineales* (rectilíneos o curvilíneos) y su longitud (que incluirían las *medidas de distancias*);

— *superficies* o *recintos*, y su área;

— *ángulos* (o *giros*) y su amplitud.

Que sin dificultad se generalizan a tres o más dimensiones, aunque surgirán nuevos objetos y sus correspondientes *medidas* coherentes con las anteriores:

— *cuerpos sólidos* y sus volúmenes;

— *ángulos sólidos* y sus amplitudes...

a) *Longitudes*, *áreas* y *volúmenes* —y sus generalizaciones— buscarán sus *unidades* como tributarias del *sistema de referencia*, en función de la *métrica subyacente*. Surgen así las *unidades abstractas*:

— **u**: unidad de longitud (y distancia), como «*longitud del segmento unitario (0, 1)*» en cualquiera de los *ejes* del *sistema de referencia* (supuesto ortonormal).

— $\mathbf{u}^2$: «*área del cuadrado unidad»,* determinado por *segmentos unitarios* en dos de los *ejes* del *sistema de referencia*.

— $\mathbf{u}^3$: «*volumen del cubo unidad»,* determinado por *segmentos unitarios* en tres de los *ejes* del *sistema de referencia*.

Si la situación es descontextualizada (abstracta), se omite la expresión de estas unidades, por considerarse implícitas.

b) Los *ángulos* cuentan, por el contrario, con *unidades naturales*:

— los *ángulos* definidos recurriendo a la ortogonalidad: *ángulo recto*, en el plano; *octante*, en el espacio tridimensional; etc.

— el *ángulo completo*; ya sea en el plano (equivalente a 4 *ángulos rectos*), en el espacio (8 *octantes*) o en cualquier dimensión.

Sin embargo, y quizás por razones de aplicabilidad a la Astronomía, desde la más remota antigüedad se tomaron otras *unidades-base*:

— *grado sexagesimal*, como submúltiplo del *ángulo completo* (1/360) o del *ángulo recto* (1/90). Y submúltiplos suyos:

— *minuto sexagesimal* (1/60 de *grado sexagesimal*) y

— *segundo sexagesimal* (1/60 de *minuto sexagesimal* = 1/3600 de *grado sexagesimal*).

La fiebre decimal llevó a concebir unidades que variasen conforme a potencias de 10 (hoy en desuso, salvo como sujeto de ramplones ejercicios de cálculo):

— *grado centesimal*, como submúltiplo del *ángulo recto* (1/100); y los correspondientes submúltiplos:

— *minuto centesimal* (1/100 de *grado centesimal*) y

— *segundo centesimal* (1/100 de *minuto centesimal* = 1/10000 de *grado centesimal*).

Formalmente, estas *unidades* daban lugar a *medidas* de «*expresión compleja»,* aunque las *medidas centesimales* admitían una *expresión decimal única*.

Con vistas a facilitar cálculos, y estrechar lazos con el Análisis de Funciones, se llega a concebir otra *unidad-base*, merced a la cual las *partes numéricas* de las *medidas* son simples *números reales*:

— *radián*: $1/(2\pi)$ del *ángulo completo*, $2/\pi$ del *ángulo recto*. Carece de sentido hablar de *múltiplos* y *submúltiplos* suyos, por cuanto que se trata de meros *números reales*.

Ninguna dificultad ofrecerá la representación Braille de expresiones correspondientes a estas medidas, ya que se han previsto las oportunas notaciones; coherentes, en algunos casos, con la representación de potencias.

Tabla 1-30. Unidades de medida para ángulos/giros

Unidad	Equivalencia con áng. recto	Notación Tinta	Braille	
			Notación	Códigos
Ángulo recto	1	...		
Grado sexagesimal	1/90	x°	⠭⠴	..., 356
Minuto sexagesimal	1/5400	x’	⠭⠳	1256
Segundo sexagesimal	1/324000	x’’	⠭⠳⠳	1256,1256
Grado centesimal	1/100	x^{g}	⠭⠡⠛	16,1245
Minuto centesimal	10^{-4}	x‘	⠭⠡⠳	16,1256
Segundo centesimal	10^{-6}	x‘‘	⠭⠡⠳⠳	16,1256,1256
Radián	$2/\pi$	Rad.	⠗⠁⠙⠄	1235,1,145,3
Stereorradián (á. sólidos)	...	sr	⠎⠗	234,1235

Tabla 1-31. Ejemplos de medidas de ángulos

Ángulo recto	Tinta	Braille
1/11	8º10´54,5´´	⠼⠓⠴⠼⠁⠚⠳⠼⠑⠙⠂⠑⠳⠳
1/11	9^{g}9`9,09``	⠼⠊⠡⠛⠼⠊⠡⠳⠼⠊⠂⠚⠊⠡⠳⠳
1/11	0,142799 rad	⠼⠚⠂⠁⠙⠃⠛⠊⠊ ⠗⠁⠙

Son inmediatas las sugerencias facilitadoras del cálculo con expresiones complejas en la máquina Perkins: reproducir la *disposición espacial empleada en tinta*, aplicando las recomendaciones simplificadoras del cálculo aritmético con enteros. La prudencia y la práctica aconsejarán o no prescindir de los *símbolos de unidades*.

Tabla 1-32. Adición de expresiones complejas: realización en Braille

$$
\begin{array}{rrr}
22^{\circ} & 30' & \\
+\,18^{\circ} & 40' & 54'' \\
\hline
40^{\circ} & 70' & 54'' \\
1^{\circ} & 10' & \\
\hline
41^{\circ} & 10' & 54''
\end{array}
$$

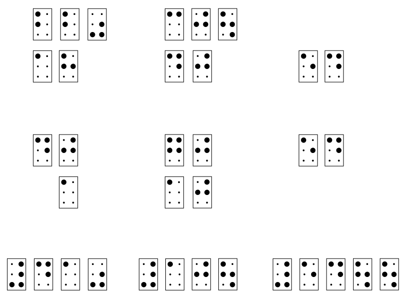


Tabla 1-33. Sustracción de expresiones complejas: realización en Braille

$$
\begin{array}{rrr}
22^{\circ} & 30' & \\
-18^{\circ} & 40' & 54'' \\
\hline
21^{\circ} & 89' & 60'' \\
-18^{\circ} & 40' & 54'' \\
\hline
3^{\circ} & 49' & 6''
\end{array}
$$

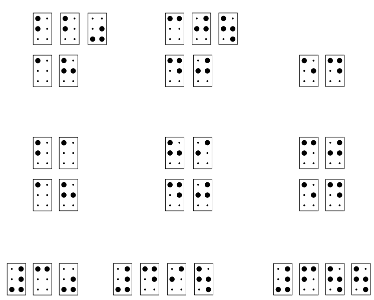


Tabla 1-34. Multiplicación de una expresión compleja por un entero: realización en Braille

```
 18°    40´    54´´
              × 6
─────────────────
108°   240´   324´´
─────────────────
108°   240´   324´´
         5´
─────────────────
108°   245´    24´´
   4°    5´
─────────────────
112°     5´    24´´
```

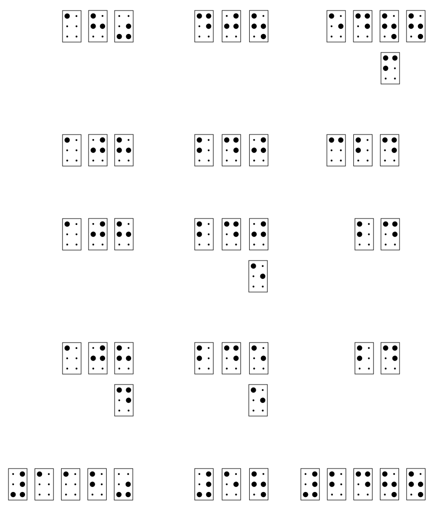
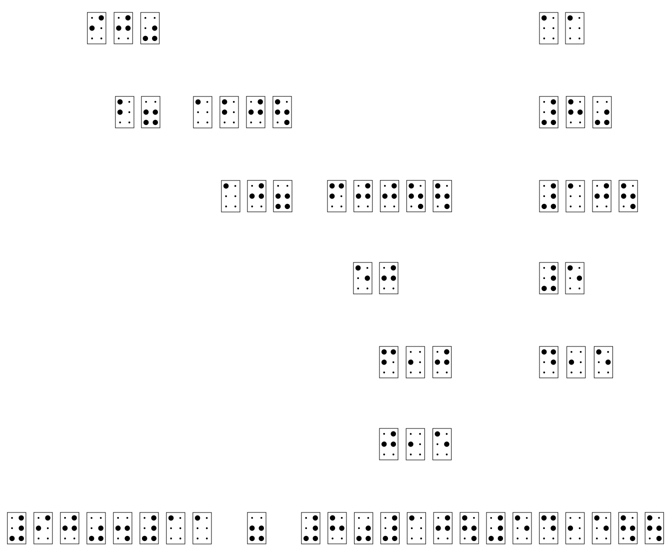


Tabla 1-35. División de una expresión compleja por un entero

```
    90°                 | 11
 2° = 120´              |__________________
 1´ = 600´´              8°   10´   54,5´´
        50
        6,0
         0,5´´
```



1.4.2. Medidas físico-químicas

Las *magnitudes* y *unidades* físicas o físico-químicas no pertenecen propiamente al objeto de la Matemática. Sin embargo, los procesos de enseñanza-aprendizaje recurren con frecuencia a situaciones de carácter físico o de Matemática Aplicada en general. De hecho, el Sistema Métrico Decimal fue desde su nacimiento un tópico de los curricula matemáticos.

Las notaciones Braille apenas precisan adaptación especial: basta con *la transcripción literal*. Se incluyen en esta obra por razones de *completitud*, a título de *catálogo*. Sin embargo, aprovecharemos la oportunidad para hacer algunas observaciones de interés didáctico.

El tradicional «*Sistema Métrico Decimal*» ha cedido el paso a los modernos Convenios de medidas; en la actualidad, rige para España el **S.I.** —«Sistema Internacional de Unidades»— (Ley de 8 de noviembre de 1967, modificada por Decreto de 25 de abril de 1974); mucho más amplio en su concepción de *magnitudes* que aquél, y con *unidades* definidas con mayores garantías de invariancia y diferenciación gráfica. Subsisten, no obstante, nexos importantes:

a) La conservación de la nomenclatura para las *unidades* más usuales: *metro*, *metro cuadrado*, *metro cúbico*, *litro*, *segundo*... *área*...

b) La estructura decimal de múltiplos y submúltiplos: relaciones entre unidades de una misma magnitud expresables en potencias de 10.

c) El recurso a «*prefijos*» para designar éstos a partir de la nomenclatura de la *unidad-base* -que no siempre coincide con la *unidad fundamental*: *gramo/kilogramo*-, y el empleo de raíces griegas y latinas para su expresión: *deka*, *hecto*, *kilo*, *giga*..., *deci*, *centi*, *mili*... Con independencia de que algunos de ellos, por su frecuencia de uso, admitan términos equivalentes: *quintal*, *tonelada*..., o múltiplos/submúltiplos de carácter local.

d) La expresión simbólica de múltiplos y submúltiplos, con idéntica notación para los *prefijos* y adición del símbolo característico de la *unidad-base*: **mm**, **mm²**, **mg**, **ml**, **mA**, **ms**... Si bien en los actuales Sistemas de Unidades se elude la ambigüidad mayúsculas/minúsculas, sirviéndose de *dos caracteres para los prefijos equívocos*: **dm** —decímetro— y **dam** —decámetro, en lugar de **Dm**, anticuado—.

Tabla 1-36. Sistema Internacional de Unidades (SI)
MAGNITUDES y Unidades FUNDAMENTALES

Magnitud	Unidad	Símbolo Tinta	Braille	
			Notación	Códigos
Longitud (distancia)	Metro	m	⠍	194
Masa	Kilogramo	kg	⠅⠛	13,1245
Tiempo	Segundo	s	⠎	234
Temperatura	Grado Kelvin	ºK	⠴⠨⠅	356,43,13
Intensidad eléctrica	Ampére (amperio)	A	⠨⠁	46,1
Intensidad luminosa	Candela	cd	⠉⠙	16,1256
Cantidad de sustancia	Mol	mol	⠍⠕⠇	134,135,123

Tabla 1-37. Sistema Internacional de Unidades (SI)
MAGNITUDES DERIVADAS y sus Unidades (I)

Magnitud	**Unidad**	**Símbolo Tinta**	**Braille**	
			Notación	**Códigos**
Superficie	Metro cuadrado	m^2	⠍⠡⠼⠃	134,16,3456,12
Volumen	Metro cúbico	m^3	⠍⠡⠼⠉	134,16,3456,14
Capacidad	Litro	l	⠇	123
Velocidad lineal	Metro por seg	m/s	⠍⠠⠂⠎	134,6,2,234
Aceleración lineal	Metro por seg cada seg	m/s^2 m/s/s	⠍⠠⠂⠎⠡⠼⠃	…
Velocidad angular	Radián por seg	rad/s	⠗⠁⠙⠠⠂⠎	…
Aceleración angular	Radián por seg cada seg	rad/s^2	⠗⠁⠙⠠⠂⠎⠡⠼⠃	…
Frecuencia	Hertz (hercio)	Hz	⠨⠓⠵	46,125,1356
Fuerza, rozamiento	Newton	N	⠨⠝	46,1345
Momento dinámico	Newton-metro	Nm	⠨⠝⠍	…
Momento de inercia	Kilogramo-metro cuadrado	kgm^2	⠅⠛⠍⠡⠼⠃	…
Impulso mecánico, Cantidad de movimiento	Newton-seg.	Ns	⠨⠝⠎	…
Densidad	Kilogramo por metro cúbico	kg/m^3	⠅⠛⠠⠂⠍⠡⠼⠉	…
Presión	Pascal	Pa	⠨⠏⠁	46,1234,1
Trabajo, energía, calor	Joule (julio)	J	⠨⠚	46,245
Potencia	Watt (vatio)	W	⠨⠺	46,2456
Calor específico	Joule por kilogramo	J/kg	⠨⠚⠠⠂⠅⠛	…
Intensidad sonora	Decibelio	db	⠙⠃	145,12

Tabla 1-38. Sistema Internacional de Unidades (SI)
MAGNITUDES DERIVADAS y sus Unidades (Ii)

Magnitud	Unidad	Símbolo Tinta	Braille	
			Notación	**Códigos**
Potencia de una lente	Dioptría	D	⠨⠙	46,145
Iluminancia	Lux	lx	⠇⠭	…
Luminancia	Candela por metro cuadrado	cd/m²	⠉⠙⠠⠂⠍⠡⠼⠃	…
Flujo luminoso	Lumen	lm	⠇⠍	…
Carga eléctrica	Coulomb (culombio)	C	⠨⠉	…
Potencial de campo eléctrico, potencial eléctrico, diferencia de potencial, fuerza electromotriz	Volt (voltio)	V	⠨⠧	…
Resistencia eléctrica	ohm (ohmio)	û	⠈⠺	4,2456
Resistividad eléctrica	ohm-metro	ûm	⠈⠺⠍	…
Capacidad eléctrica	Farad (faradio)	F	⠨⠋	…
Coeficiente de autoinducción	Henry (henrio)	H	⠨⠓	…
Impedancia, reactancia inductiva, reactancia capacitativa	ohm (ohmio)	û	⠈⠺	4,2456
Inducción magnética	Tesla	T	⠨⠞	…
Flujo de inducción magnética	Weber	Wb	⠨⠺⠃	…
Energía interna, entalpía	Joule por mol (julio por mol)	J/mol	⠨⠚⠠⠂⠍⠕⠇	…
Entropía	Joule por grado Kelvin	J/ºK	⠨⠚⠠⠂⠴⠨⠅	…
Concentración	Molar	M	⠨⠍	46,134

(Para las *magnitudes derivadas* se ha indicado con puntos suspensivos los *códigos de los puntos correspondientes al símbolo Braille*, por tratarse de una simple transcripción literal.)

Obsérvese que el símbolo en Braille de *grado de temperatura* —en cualquiera de las escalas termométricas— coincide con el *grado unidad de medida angular* (puntos 356). Su misma diferenciación en tinta es discutible —por no decir imposible—; pero el contexto deshace cualquier equívoco.

Tabla 1-39. Prefijos para múltiplos y submúltiplos de unidades

Prefijo	Equivalencia	Notación Tinta	Braille	
			Notación	Códigos
Exa	10^{18}	e	⠑	15
Peta	10^{15}	P	⠨⠏	46,1234
Tera	10^{12}	T	⠨⠞	46,2345
Giga	10^{9}	G	⠨⠛	46,1245
Mega	10^{6}	M	⠨⠍	46,134
Hecto-kilo	10^{5}	hk	⠓⠅	125,13
Decakilo (miria)	10^{4}	dk	⠙⠅	145,13
Kilo	1000	k	⠅	13
Hecto	100	h	⠓	125
Deca	10	da	⠙⠁	145,1
Deci	10^{-1}	d	⠙	145
Centi	10^{-2}	c	⠉	14
Mili	10^{-3}	m	⠍	134
Micro	10^{-6}	μ	⠈⠍	4,134
Nano	10^{-9}	n	⠝	1345
Pico	10^{-12}	p	⠏	1234
Femto	10^{-15}	f	⠋	124
Atto	10^{-18}	a	⠁	1

Al expresar en Braille una medida se presenta, no obstante, una pequeña dificultad.

La *escritura en tinta* no respeta espacio de separación entre la *parte numérica* y la *parte literal* —correspondiente a la *unidad*, afectada ésta, o no por un prefijo—. La versión Braille es inmediata; salvo que el primer carácter de dicha *parte literal* sea una de *las diez primeras letras del* *abecedario en minúsculas*, ya que precisamente son éstas las empleadas como integrantes de los *símbolos numéricos*. Existen dos alternativas para superar este escollo:

1ª Solución de estricto paralelismo Tinta-Braille: anteponer a la *parte literal* el «*indicador de latina minúscula*» (ver Apartado 2.1A).

2ª Solución de *claridad lectora*: observar un *espacio en blanco* entre la *parte numérica* y la *parte literal*.

La primera origina no pocos errores de lectura, al confundirse dicho *prefijo de latina minúscula* (⠐, punto 5; ver Capítulo siguiente) con la *coma* (⠂, punto 2), especialmente si la *parte numérica* es entera. Hay que confiar entonces en que el contexto deshaga tal confusión, si es ilustrativo y coherente. Pero incluso: aunque la *parte literal* no comience por *latina minúscula,* puede inducir a error, al leer equivocadamente *103* por **10m**, *22* por **2l**, etc.

La segunda no plantea dificultad alguna, exceptuados dos detalles sistémicos: a) que rompe -inocuamente- el estricto paralelismo Braille-Tinta; b) que, en aras de la regularidad representativa, debiera respetarse dicho *espacio en blanco* tanto en los casos perturbadores como en todos (algo en lo que no hay inconveniente). El interés didáctico de la *claridad* lo hace preferible a la *ultracorrección transcriptora*. Se resume en una *regla general*, que atiende al *estricto paralelismo* en la mayoría de los casos, y asegura siempre la *claridad lectora*:

> En la representación Braille de medidas físico-químicas (cantidades con expresión simbólica de unidades), deberá mediar al menos un «*semiespacio*» *en blanco* entre la *parte numérica* y la *parte literal*. Es decir: cuando el primer carácter de ésta no sea el «*prefijo de mayúscula o de letra griega*»*,* deberá mediar un *espacio en blanco*

Tabla 1-40. Ejemplos de expresiones de cantidades físicas

Notación Tinta	Representación Braille	
	Paralelismo estricto tinta-Braille	Recomendada
2cm	⠼⠃⠐⠉⠍	⠼⠃ ⠉⠍
45g	⠼⠙⠑⠐⠛	⠼⠙⠑ ⠛
3ml	⠼⠉⠍⠇	⠼⠉ ⠍⠇
42ns	⠼⠙⠃⠝⠎	⠼⠙⠃ ⠝⠎
1,3A	⠼⠁⠂⠉⠨⠁	⠼⠁⠂⠉⠨⠁
35ϖ	⠼⠉⠑⠈⠺	⠼⠉⠑ ⠈⠺

2. ÁLGEBRA

Durante siglos se han identificado las denominaciones *Álgebra* y *Aritmética General*. La razón era bien simple: Álgebra es el *"Cálculo con letras"*.

Desde el siglo XIX, esta concepción se ha quedado estrecha. El Álgebra se ocupa no sólo de las operaciones aritméticas extendidas a objetos en las que intervienen *letras*. Al ampliarse el propio concepto de *operación aritmética*, el Álgebra puede considerarse como *"la parte de las Matemáticas que se ocupa de las estructuras resultantes de definir una «ley de composición interna»"*, posible sobre un conjunto. Las *letras* representan ahora *cualquier objeto*, y no sólo expresiones numéricas o literales —como era el caso clásico de los *polinomios* y *ecuaciones*—.

Pero al propósito de representar y trabajar en Braille expresiones algebraicas de cualquier índole, poco le importa la evolución histórica del dominio del Álgebra. interesa, casi exclusivamente:

1º La representación Braille de los objetos algebraicos; más exactamente: las *reglas de transcripción* y las perturbaciones que para la *convivencia escrita* puedan derivarse de la polisemia de los signos Braille.

2º Garantías de inequivocidad y claridad en las expresiones algebraicas Braille, facilitadoras del cálculo.

3º Técnicas específicas y sugerencias tendentes a paliar las dificultades derivadas de aspectos tales como las escasas dimensiones de la página Braille, la imposibilidad de "marcado" *a posteriori* y las características de la exploración háptica.

Permaneceremos en los límites que nos hemos impuesto voluntariamente: los contenidos propios de los niveles de Enseñanza Media. Aunque las propuestas sean extensibles sin dificultad a los niveles universitarios.

2.1. **ESCRITURA DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS**

Como se indicaba más arriba, hablar de Álgebra es hablar ante todo de *operaciones*; es decir: *leyes de composición interna en un conjunto*, entendiendo por tal *"una aplicación que a cada par de elementos del conjunto le hace corresponder otro elemento del mismo conjunto"*

$$A \times A \xrightarrow{*} A$$

$$a,b \in A: (a,b) \rightarrow a*b \in A$$

Surgen ya las dos primeras necesidades:

a) representación de los elementos o términos elementales del conjunto de definición;

b) representación de la *operación entre elementos*.

Mientras los *operandos* sujetos de una operación fueron *números*, éstos estuvieron representados en su forma habitual. Cuando, produciéndose el salto de Aritmética a Álgebra, las cantidades a representar eran desconocidas o se pretendía una generalización aplicable a todo el ámbito numérico, se recurrió a las *letras* del abecedario ordinario.

Más exactamente, habría que decir: se recurrió a «marcas sencillas», que pronto se asimilaron a «letras del abecedario en uso», como fue el caso de **X**, **Z**, **Y**. Y si éstas satisfacían los propósitos expresivos, ¿por qué no otras, o sus minúsculas?

La generalización conservó esta doble costumbre de *signos especiales* para las operaciones y *letras* para elementos. Fruto de la fantasía de los autores, unas veces; tomados de alfabetos diversos (griego, hebreo, cirílico), otras.

El Braille era suficientemente potente y flexible para hacer frente a necesidades tales. Bien que se presentarían dificultades de *unificación* entre países y editoras, que procuraron ser resueltos mediante acuerdo a lo largo de todo el siglo XX, con éxito dispar.

Sin detenernos en las transformaciones sufridas a lo largo del tiempo, traigamos aquí la representación actual de los principales alfabetos empleados en Matemáticas según el "Código Matemático Unificado":

Tabla 2-1. Abecedario latino (minúsculas)

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
⠁	⠃	⠉	⠙	⠑	⠋	⠛	⠓	⠊	⠚
1	12	14	145	15	124	1245	125	24	245
k	l	m	n	o	p	q	r	s	t
⠅	⠇	⠍	⠝	⠕	⠏	⠟	⠗	⠎	⠞
13	123	134	1345	135	1234	12345	1235	234	2345
u	v	x	y	z			ñ		w
⠥	⠧	⠭	⠽	⠵			⠻		⠺
136	1236	1346	13456	1356			12456		2456

Tabla 2-2. Abecedario latino (mayúsculas)

Códigos: 46,...									
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
⠨⠁	⠨⠃	⠨⠉	⠨⠙	⠨⠑	⠨⠋	⠨⠛	⠨⠓	⠨⠊	⠨⠚
K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
⠨⠅	⠨⠇	⠨⠍	⠨⠝	⠨⠕	⠨⠏	⠨⠟	⠨⠗	⠨⠎	⠨⠞
U	V	X	Y	Z			Ñ		W
⠨⠥	⠨⠧	⠨⠭	⠨⠽	⠨⠵			⠨⠻		⠨⠺

Tabla 2-3. Alfabeto griego

Nombre	Minúsculas			Mayúsculas		
	Tinta	Braille		Tinta	Braille	
		Notación	Códigos		Notación	Códigos
Alpha	α	⠈⠁	4,1	Α	⠘⠁	45,1
Beta	β	⠈⠃	4,12	Β	⠘⠃	45,12
Gamma	γ	⠈⠛	4,1245	Γ	⠘⠛	45,1245
Delta	δ	⠈⠙	4,145	Δ	⠘⠙	145
Épsilon	ε	⠈⠑	4,15	Ε	⠘⠑	45,15
Zeta	ζ	⠈⠵	4,1356	Ζ	⠘⠵	45,1356
Eta	η	⠈⠱	4,156	Η	⠘⠱	45,156
Theta	θ	⠈⠹	4,1456	Θ	⠘⠹	45,1456
Iota	ι	⠈⠒	4,25	Ι	⠘⠒	45,25
Kappa	κ	⠈⠅	4,13	Κ	⠘⠅	45,13
Lambda	λ	⠈⠇	4,123	Λ	⠘⠇	45,123
Mu	μ	⠈⠍	4,134	Μ	⠘⠍	45,134
Nu	ν	⠈⠝	4,1345	Ν	⠘⠝	45,1345
Xi	ξ	⠈⠭	4,1346	Ξ	⠘⠭	45,1346
Omikron	ο	⠈⠕	4,135	Ο	⠘⠕	45,135
Pi	π	⠈⠏	4,1234	Π	⠘⠏	45,1234
Rho	ρ	⠈⠗	4,1235	Ρ	⠘⠗	45,1235
Sigma	σ	⠈⠎	4,234	Σ	⠘⠎	45,234
Tau	τ	⠈⠞	4,2345	Τ	⠘⠞	45,2345
Ípsilon	υ	⠈⠥	4,136	Υ	⠘⠥	45,136
Phi	φ	⠈⠋	4,124	Φ	⠘⠋	45,124
Ji	χ	⠈⠯	4,12346	Χ	⠘⠯	45,12346
Psi	ψ	⠈⠽	4,13456	Ψ	⠘⠽	45,13456
Omega	ω	⠈⠺	4,2456	Ω	⠘⠺	45,2456

Las variedades tipográficas también cuentan con un paralelo Braille, en caso de ser relevantes:

Tabla 2-4. Variantes tipográficas clásicas

	Góticas			**Cursivas**		
	Tinta	**Braille**		**Tinta**	**Braille**	
		Notación	**Códigos**		**Notación**	**Códigos**
Minúsculas	p	⠠⠏	6,...	p	⠔⠏⠔	35,...,35
Mayúsculas	P	⠰⠏	56,...	P	⠔⠨⠏⠔	35,46,...,35

Otras variedades, como pueden ser la *negrita* y *subrayada*, se asimilan a éstas o se les antepone algún *"prefijo especial"* (a tomar de entre los *"comodines"* del "Código Matemático Unificado"):

Tabla 2-5. Variantes tipográficas Braille (mediante prefijos/comodín)

	Tipo a	**Tipo b**
Notación	⠪⠏	⠻⠏
Códigos	1456,...	12456,...

Las *superrayadas* se consideran como *letras alteradas* por una *marca*:

Tabla 2-6. Letras superrayadas

		Superrayado sencillo		**Superrayado doble**	
Tinta		$\overline{\text{p}}$	$\overline{\text{P}}$	$\overline{\overline{\text{p}}}$	$\overline{\overline{\text{P}}}$
Braille	Notación	⠈⠉⠏	⠈⠉⠨⠏	⠈⠉⠈⠉⠏	⠈⠉⠈⠉⠨⠏
	Códigos	4,14,...		4,14,4,14,...	

El restringido número de signos elementales Braille y la ingente cantidad de signos matemáticos, tarde o temprano, acaban por plantear problemas de transcripción. Mucho antes de recurrir en la enseñanza a tales variantes, con tan sólo el *abecedario latino*, surgen en Álgebra los primeros inconvenientes.

A) DISTINCIÓN ENTRE *LETRAS Y EXPRESIONES NUMÉRICAS:* EL PREFIJO DE LATINA MINÚSCULA

Desde los primeros momentos, se tiende a suprimir el *signo de multiplicar* en expresiones en las que intervienen *letras*:

$$3x = 3 \times x$$
$$ax = a \times x$$
$$3ax = 3 \times a \times x$$
$$3xa = 3 \times x \times a$$

Al transcribir en Braille la primera columna de expresiones, tropezaríamos con el doble valor que podría tomar la **a** en Braille: como *letra* y como *parte de una expresión numérica*. Para evitarlo, se recurre al *prefijo de letra latina minúscula* (⠐, punto 5); pero sólo cuando es preciso.

Tabla 2-7. Expresiones algebraicas simples

<table>
<tr><th rowspan="2">Tinta</th><th colspan="2">Braille</th><th rowspan="2">Valor repres.</th></tr>
<tr><th>Correcto</th><th>Incorrecto</th></tr>
<tr><td>3a</td><td>⠼⠉⠐⠁</td><td>⠼⠉⠁</td><td>31</td></tr>
<tr><td>3x</td><td>⠼⠉⠭</td><td>⠼⠉⠐⠭</td><td>3x</td></tr>
<tr><td>ax</td><td>⠁⠭</td><td>⠐⠁⠐⠭
⠐⠁⠭
⠁⠐⠭</td><td>ax</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3ax</td><td rowspan="2">⠼⠉⠐⠁⠭</td><td>⠼⠉⠁⠭</td><td>31x</td></tr>
<tr><td>⠼⠉⠐⠁⠐⠭</td><td>3ªx</td></tr>
<tr><td>3xa</td><td>⠼⠉⠭⠁</td><td>⠼⠉⠐⠭⠁
⠼⠉⠐⠭⠐⠁
⠼⠉⠭⠐⠁</td><td>3xa</td></tr>
</table>

Obsérvense las *incorrecciones* para **3x**, **ax** y **3xa** de la 2ª columna. Pueden estimarse como *ultracorrecciones*, que, si bien no modifican el significado matemático (como ocurre en las otras dos), perturban la lectura e incluso pueden inducir a error: *9x* por **ax**.

B) *MARCAS, ÍNDICES* E INDICADORES DE POSICIONES RELATIVAS

La representación de un valor o variable mediante una *letra* aparece con frecuencia *soportando* otros *signos* que le competen exclusivamente a ella.

Nos referimos, en particular, a dos grupos de símbolos emplazados en algún lugar *en torno* a la *letra-base* distintos del *anterior* o *posterior*; no a *signos de operaciones monarias*, aunque algunos de estos *ornatos* o *modificadores* sí pueden expresar algún género de *operación* o *transformación* (^{2}, ^{3}, $^{-1}$, **∼**, etc.).

a) *Índices*. Guarismos o letras que suelen ocupar —en Matemática Básica, al menos— posición superior (*superíndices*) o inferior (*subíndices*) a la derecha de la *letra-base*.

b) *Marcas*. Símbolos diversos (´, **.**, *****, **–**, **=**, **+**, **∼**...) que pueden disponerse en cualquiera de las seis posiciones resultantes de combinar *derecha, centro, izquierda* con *superior o inferior*, aunque en Matemática Básica predomina la posición *superior derecha*.

La función asignada a estos símbolos es muy variada. En cualquier caso, *letra-base* y *marca* o *índice* constituyen una unidad simbólica. El contexto temático puede que confieran significado independiente a una u otros; pero, de ordinario, precisan una *definición local*, que se mantendrá mientras no se revoque.

Normalmente, en Álgebra Elemental, los *superíndices* indican *exponentes*: $x^2 = x \times x$, $x^3 = x \times x \times x$, $x^{-1} = 1/x$... Aunque también pueden referirse a otros parámetros en objetos diversos: *orden* en *variaciones* o *combinaciones*, *orden de covarianza o contravarianza* en *tensores*, etc.

En Braille, unas ocasiones se distingue el significado matemático por la grafía; otras, se atiende tan sólo a la grafía, con independencia de su valor matemático. Claro está que —al igual que en tinta— el contexto disipa cualquier ambigüedad.

El valor de *exponente* o representación como *superíndice* implica en tinta dos aspectos: *menor tamaño* y *posición superior derecha* respecto de la *letra-base*, *número-base* o *paréntesis* afectado. Pero tan sólo el segundo es relevante. Éste será propiamente el objeto de transcripción Braille:

Tabla 2-8. Exponentes y superíndices

Tinta	**Braille**	
	Representación	**Códigos**
5^2	⠼⠑⠡⠼⠃	...,16,...
$1{,}25^n$	⠼⠁⠂⠃⠑⠡⠝	...,16,...
x^2	⠭⠡⠼⠃	...,16,...
x^n	⠭⠡⠝	...,16,...
$(3+a)^2$	⠣⠼⠉⠖⠁⠜⠡⠼⠃	...,16,...
Z^{-1}	⠵⠡⠤⠼⠁	...,16,...
$z^{1/2}$	⠵⠡⠼⠂⠃	...,16,...
$z^{-2/3}$	⠵⠡⠤⠼⠆⠉	...,16,...

Así pues, el llamado *signo de exponente* (⠡, puntos 16) indica *"el valor que sigue es superíndice (en particular: exponente)"*. Análogamente:

Tabla 2-9. Subíndices

Tinta		x_1	a_2	x_n
Braille	Representación	⠭⠌⠼⠁	⠁⠌⠼⠃	⠭⠌⠝
	Códigos	.,34,.	.,34,.	.,34,.

El llamado *signo de subíndice* (⠌, puntos 34) indicará: *"el valor que sigue es subíndice"*.

(En la Sección 2.2 se estudian los casos de *superíndice* (en particular: *exponente*) y *subíndice* integrados por *expresiones complejas*.)

Los *signos para subíndices y superíndices Braille* se generalizan a las *seis posibles posiciones relativas*:

Posiciones relativas de marcas o índices respecto de una letra-base

1	2	3
.	Z	.
4	5	6

Sin embargo, debido a su frecuencia, algunas *marcas* cuentan con un tratamiento privilegiado; en especial, las situadas en las posiciones *superior derecha* y aun *superior centro*:

Tabla 2-10. Marcas más frecuentes

Tinta	**Braille**	
	Representación	**Códigos**
Z'	⠵⠳	..,1256
Z''	⠵⠳⠳	...,1256,1256
Z^*	⠵⠲⠄	...,256,3
z^{**}	⠵⠲⠲⠄	...,256,256,3
Z^+	⠵⠖⠄	...,236,3
z^-	⠵⠤⠄	...,36,3
$\overline{Z}$	⠈⠉⠵	4,14,...
$\overline{\overline{Z}}$	⠈⠉⠈⠉⠵	4,14,4,14,...
$\underline{Z}$	⠠⠤⠵	6,36,...
$\underline{\underline{Z}}$	⠠⠤⠠⠤⠵	6,36,6,36,...

En caso de concurrir sobre una misma *letra-base* varias *marcas* y/o varios *índices*, el orden de escritura lineal en Braille sería:

1º marcas en superescrito (posición 2) e infraescrito (posición 5),

2º **símbolo base** o *portador*;

3º índices a la izquierda (posiciones 1 y 4);

4º marcas a la izquierda (posiciones 1 y 4);

5º marcas a la derecha (posiciones 3 y 6);

6º subíndices a la derecha (posición 6);

7º superíndices a la derecha (posición 3).

Tabla 2-11. Ejemplos de letras afectadas por varios índices y/o marcas

Tinta	**Braille**
Z'_0	⠵⠳⠌⠼⠚
Z_1^3	⠵⠌⠼⠁⠡⠼⠉
$\overline{Z_0}$	⠈⠉⠵⠌⠼⠚
$\overline{Z_0}^2$	⠈⠉⠢⠵⠌⠼⠚⠡⠼⠃⠔

C) FRACCIONES ALGEBRAICAS SENCILLAS

Entendemos por *fracción* o *razón algebraica simple* aquélla en la que algunos de sus términos es *una letra* o *potencia literal*.

Como se recogía en 1.3, el signo Braille ***** (⠲, puntos 256) indica *división*, *cociente*, *fracción* o *razón*. Si en Aritmética existían *sinonimias Braille*, no así en Álgebra: ésta es la única forma de representar cocientes.

Tabla 2-12. Fraciones algebraicas sencillas

Tinta	**Braille**
$\frac{x}{3}$	⠭⠲⠼⠉
$\frac{3}{x}$	⠼⠉⠲⠭
$\frac{x^2}{3}$	⠭⠡⠼⠃⠲⠼⠉
$\frac{3}{x^2}$	⠼⠉⠲⠭⠡⠼⠃
$\frac{a^2}{x^n}$	⠁⠡⠼⠃⠲⠭⠡⠝

Así pues, el *signo de cociente* (⠲, puntos 256) podría interpretarse: *"...hasta aquí, dividendo (numerador, antecedente); a partir de aquí, divisor (denominador, consecuente)"*. En alguna forma, traduce en Braille una cierta *bidimensionalidad de la escritura en tinta*: convierte en *antes-después* o *izquierda-derecha* lo que es *arriba-abajo*; una *traducción gráfica* que será de suma importancia en lo sucesivo (ver Sección 2.2).

(De nuevo, los casos de términos integrados por *expresiones complejas* serán tratados en la próxima Sección.)

D) RAÍCES

Las expresiones algebraicas no racionales se corresponden en su versión Braille con las aritméticas:

Tabla 2-13. Radicales sencillos

Tinta	Braille	
	Representación	**Códigos**
$\sqrt{3}$	⠫⠱⠼⠉	1246,156,...
$\sqrt{x}$	⠫⠱⠭	1246,156,...
$\frac{2}{\sqrt{x}}$	⠼⠃⠲⠫⠱⠭	...
$\frac{\sqrt{x}}{2}$	⠫⠱⠭⠲⠼⠃	...
$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}}$	⠫⠱⠭⠲⠫⠱⠁	...

¡Atención!: en todos estos ejemplos, el *radicando* es *simple* (*un número*, *una letra*, una *potencia*). Si el *radicando* es una *expresión compleja*:

$$\sqrt{x}+2 \qquad \sqrt{2x} \qquad \sqrt{\frac{2}{x}} \quad \sqrt{\frac{\sqrt{x}}{a}}$$

el *signo radical "encierra bidimensionalmente al radicando"*, bien por su trazo horizontal o por su parte inicial vertical. Algo que será preciso expresar, en evitación de equívocos (ver, una vez más, Sección siguiente).

Resumiendo: cualquier expresión algebraica es relativamente fácil de representar en Braille:

Tabla 2-14. Expresiones algebraicas incluyendo subíndices

Tinta	Braille
$5x^3 - 4x^2 + 2x-1$	⠼⠑⠭⠡⠼⠉⠤⠼⠙⠭⠡⠼⠃⠖⠼⠃⠭⠤⠼⠁
$3 + \sqrt{x}$	⠼⠉⠖⠫⠱⠭
$\frac{2}{x} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}$	⠼⠃⠲⠭⠤⠫⠱⠼⠃⠲⠫⠱⠭
$x_1{}^2 + x_2{}^2 - x_3{}^2$	⠭⠌⠼⠁⠡⠼⠃⠖⠭⠌⠼⠃⠡⠼⠃⠤⠭⠌⠼⠉⠡⠼⠃
$x_1 + \sqrt{x_2}$	⠭⠌⠼⠁⠖⠫⠱⠭⠌⠼⠃

2.2. EL "CARÁCTER LINEAL" DEL BRAILLE, O "LOS PARÉNTESIS INVISIBLES"

A lo largo de toda la Sección anterior se ha venido remitiendo a ésta, cuando se llegaba al punto de *expresiones complejas*; es decir: expresiones que cuentan con más de una *cantidad numérica* o *letra*. La razón era bien simple.

En Álgebra —y también en Aritmética— es frecuente que una expresión haga las funciones de *operando único*: factor, numerador/denominador, radicando, exponente, etc. La unificación se lleva a cabo de dos formas:

1º Mediante *paréntesis* u otros *signos unificadores* (*corchetes*, *llaves*, *barras de valor absoluto*, etc.),

2º en virtud de su *posición* en el conjunto de la operación, aunque en ocasiones sea preciso modificar levemente algún *signo especial*.

Expresiones algebraicas complejas

$(x-1)(x+1)$	$\frac{3}{2x}$ $\frac{x-1}{x+1}$	$(x+1)^2$ 2^{x+1}	X_{n+1}	$\sqrt{x+1}$ $\sqrt{\frac{x}{x+1}}$
Productos	Cocientes	Potencias	Subíndices	Raíces

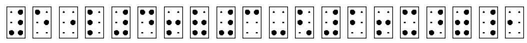
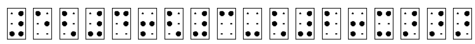
Se dispone de versión Braille para cualquiera de los llamados *signos unificadores*: *paréntesis*, *corchetes*, *llaves*, *barras de módulo y valor absoluto*, etc. Aunque con una *regla de simplificación*:

a) Salvo que tengan un *significado específico*, los *paréntesis*, *corchetes* y *llaves* se transcriben como *paréntesis ordinario* (abrir: ⠣, puntos 126; cerrar: ⠜, puntos 345).

Por *valor específico* se entienden *las llaves de conjunto*, *los corchetes o paréntesis cuadrados para intervalos*, etc.

Aunque la tendencia general en tinta es la de emplear un solo tipo de paréntesis —el *curvo*, ordinario—, algunos autores persisten en emplear *corchetes* y *llaves* (por este orden) para los casos de *paréntesis anidados*:

Tabla 2-15. Variedades de paréntesis

Tinta		5{4 + [3 – (2 + x)]}
Braille	Representación	
	Códigos	.,5,123,.,12356,.,126,.,345,23456,456,2
Tinta		5 (4 + (3 – (2 + x)))
Braille	Representación	
	Códigos	...,126,..,126,..,126,..,345,345,345

Puede observarse que no existe riesgo de confusión: *"todo paréntesis que se abre debe cerrarse, en orden inverso a como se abrió"*; es decir: los pares de paréntesis están *anidados* o *sucesivos*, nunca *entrecruzados*. Y precisamente es esta inequivocidad la que se aprovecha en Braille (y por los *editores de programas informáticos y hojas de cálculo*; véase, p. ej.: DERIVE).

Como se muestra en los ejemplos de más arriba, un *emplazamiento espacial anormal* —entre términos de una expresión o respecto de algún *signo especial*— determina una forma de *unificación implícita*. Es el caso de:

— Numerador o denominador operatoriamente complejos; unificado por la *barra de fracción*.

— La expresión radicando; unificada por la cobertura que le ofrece el trazo horizontal del *signo de raíz*.

— Exponentes o superíndices y subíndices; unificados/diferenciados por su desplazamiento respecto del *nivel ordinario de escritura*; no tanto por su menor tamaño.

— El índice de una raíz; diferenciado/unificado por su emplazamiento sobre el ángulo del *signo de raíz*, etc.

La linealidad del Braille obliga a dos decisiones de transcripción:

— si alguno de los operandos es una expresión compleja, unificarlo explícitamente;

— determinar el orden de transcripción de los operandos simples o complejos *gráficamente unificados*.

Que cristalizan en dos *reglas generales*:

b) Los siguientes operandos —aritméticos o algebraicos—, de ser expresiones operatoriamente complejas (dos o más términos operados a su vez entre sí), exigen estar forzosamente *unificados en Braille*:

— numerador o denominador de una fracción,

— exponente o superíndice,

— subíndice,

— radicando,

— argumento de ciertas funciones (trigonométricas, hiperbólicas, etc.), no encerrados entre paréntesis.

La unificación de índices en radicales se obtiene sirviéndose del propio *signo de raíz*, gracias a su condición de *signo compuesto* (⠫⠱, puntos 1246,156), que permite encerrar/unificar aquél (ver ejemplo). La exigencia sería matemáticamente redundante en el caso de que el *numerador de la fracción* fuera un *producto*.

Como *signo unificador* específico del Braille se emplea el *"paréntesis auxiliar"* (abrir: ⠢, puntos 26; cerrar: ⠔, puntos 35). Bien entendido que este uso sería redundante en caso de emplearse en tinta el *paréntesis ordinario*, que deberá aparecer en Braille.

c) El orden de transcripción de operandos —aritméticos o algebraicos— es, en Braille respecto de la escritura en tinta:

Tinta	Braille
operaciones entre operandos sin índices:	
arriba-abajo	izquierda-derecha
operando con índices:	
abajo-arriba	izquierda-derecha
Emplazamiento de índices:	
abajo-arriba	izquierda-derecha

Véase también al respecto la *regla sobre transcripción de símbolos que incluyen varias marcas e índices* (Apartado 2.1B). Los ejemplos 2.2B ilustran estas reglas; en particular, la importancia de un uso correcto del *"paréntesis auxiliar"*.

En resumen, podría afirmarse que

Lo que es cierto incluso para el *paréntesis auxiliar*, cuando es necesario, y en el lugar oportuno. Éste suele corresponderse con pausas, inicial y final, limitadoras de la *expresión a unificar*.

Probemos con algunos ejemplos, por limitado y difícil que resulte un paralelismo total entre *escritura* (expresión mediante *signos de puntuación*) y *lectura* (respeto de *pausas*).

Tabla 2-16. Transcripción Braille y lectura oral[1] de expresiones complejas

<table>
<tr><td rowspan="2">Expresión escrita</td><td>Tinta</td><td>Braille</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{a + b}{c + d}$</td><td>⠢⠁⠖⠃⠔⠲⠢⠉⠖⠙⠔</td></tr>
<tr><td>Expresión oral</td><td colspan="2">{Fracción; numerador:} a-más-b, partido {denominador:}
c-más-d {fin de denominador}.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Expresión escrita</td><td>Tinta</td><td>Braille</td></tr>
<tr><td>$a + \dfrac{b}{c} + d$</td><td>⠁⠖⠃⠲⠉⠖⠙</td></tr>
<tr><td>Expresión oral</td><td colspan="2">a; más b-partido-c, más d.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Expresión escrita</td><td>Tinta</td><td>Braille</td></tr>
<tr><td>$a + \dfrac{b}{c + d}$</td><td>⠁⠖⠃⠲⠢⠉⠖⠙⠔</td></tr>
<tr><td>Expresión oral</td><td colspan="2">a más, {fracción:} b partido {denominador:} c-más-d.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Expresión escrita</td><td>Tinta</td><td>Braille</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{a + b}{c} + d$</td><td>⠢⠁⠖⠃⠔⠲⠉⠖⠙</td></tr>
<tr><td>Expresión oral</td><td colspan="2">{Fracción; numerador:} a-más-b, partido c; más d.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Expresión escrita</td><td>Tinta</td><td>Braille</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{ab}{cd}$</td><td>⠢⠁⠃⠔⠲⠢⠉⠙⠔</td></tr>
<tr><td>Expresión oral</td><td colspan="2">{Fracción; numerador:} a-b, partido: {denominador:}
c-d {fin de denominador}.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Expresión escrita</td><td>Tinta</td><td>Braille</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{ab}{c}\,d$</td><td>⠢⠁⠃⠔⠲⠉⠙</td></tr>
<tr><td>Expresión oral</td><td colspan="2">a-b, partido c; por d.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Expresión escrita</td><td>Tinta</td><td>Braille</td></tr>
<tr><td>$a\,\dfrac{b}{cd}$</td><td>⠁⠃⠲⠢⠉⠙⠔</td></tr>
<tr><td>Expresión oral</td><td colspan="2">a, b-partido {denominador:} c-d.</td></tr>
</table>

[1] Los términos/expresiones entre llaves indican posibles aclaraciones o complementos. Los guiones, nexos en la expresión oral.

Tabla 2-16. Transcripción Braille y lectura oral de expresiones complejas (continuación)

Expresión escrita	Tinta	Braille
	$\frac{ab}{c}d$	⠁⠃⠲⠉⠙
Expresión oral	a b-partido-c, por d.	
Expresión escrita	Tinta	Braille
	$\sqrt{x+1}$	⠫⠱⠢⠭⠖⠼⠁⠔
Expresión oral	raíz-cuadrada-de {radicando}: x-más-1.	
Expresión escrita	Tinta	Braille
	$\sqrt{x}+1$	⠫⠱⠭⠖⠼⠁
Expresión oral	raíz-cuadrada-de-x, más 1.	
Expresión escrita	Tinta	Braille
	$\sqrt{\frac{1}{x}}$	⠫⠱⠢⠼⠁⠲⠭⠔
Expresión oral	raíz-cuadrada-de {radicando}: 1-partido-x.	
Expresión escrita	Tinta	Braille
	$\sqrt[n]{x+1}$	⠫⠝⠱⠢⠭⠖⠼⠁⠔
Expresión oral	raíz-n-ésima-de {radicando}: x-más-1.	
Expresión escrita	Tinta	Braille
	$\sqrt[n+1]{x+1}$	⠫⠝⠖⠼⠁⠱⠭⠖⠼⠁
Expresión oral	raíz, de orden n-más-1, de-x, más 1.	
Expresión escrita	Tinta	Braille
	a^{x+1}	⠁⠡⠢⠭⠖⠼⠁⠔
Expresión oral	a-elevado-a {exponente}: x-más-1.	
Expresión escrita	Tinta	Braille
	a_n^{x+1}	⠁⠌⠝⠡⠢⠭⠖⠼⠁⠔
Expresión oral	a-sub-n, elevado-a: (exponente) x-más-1.	
Expresión escrita	Tinta	Braille
	$a^x + 1$	⠁⠡⠭⠖⠼⠁
Expresión oral	a-elevado-a-x, más-1.	

Tabla 2-16. Transcripción Braille y lectura oral de expresiones complejas (continuación)

Expresión escrita	Tinta	Braille
	$a_n{}^x + 1$	⠁⠌⠝⠡⠭⠖⠼⠁
Expresión oral	a-sub-n, elevado-a-x, más-1.	
Expresión escrita	Tinta	Braille
	$a_{n+1}{}^{x+1}$	⠁⠌⠢⠝⠖⠼⠁⠔⠡⠢⠭⠖⠼⠁⠔
Expresión oral	a-sub: n-más-1; elevado a {exponente}: x-más-1.	
Expresión escrita	Tinta	Braille
	$\sin^{a+b}$	⠎⠊⠝⠢⠁⠖⠃⠔
Expresión oral	seno-de: a-más-b.	
Expresión escrita	Tinta	Braille
	$\sin^a + b$	⠎⠊⠝⠁⠖⠃
Expresión oral	seno-de-a, más-b.	
Expresión escrita	Tinta	Braille
	$\lim\limits_{\underbrace{\quad}_{n \to \infty}} \dfrac{n+1}{n}$	⠇⠊⠍⠄⠝⠒⠂⠼⠳⠱⠢⠝⠖⠼⠁⠔⠲⠝
Expresión oral	límite, cuando-n-tiende-a-infinito,-de: {fracción; numerador}: n-más-1, partido-{denominador:}-n.	
Expresión escrita	Tinta	Braille
	$\sum\limits_{i=1}^{i=8} i^2$	⠘⠎⠊⠶⠼⠁⠒⠊⠶⠼⠓⠱⠊⠡⠼⠃
Expresión oral	Sumatorio, desde-i-igual-1 hasta i-igual-8,-de: i-cuadrado.	

Si se tratara de *expresiones complejas* requeridoras de *unificación mediante el paréntesis auxiliar* que, a su vez, comprendieran otras también necesitadas de tal unificación, los *paréntesis auxiliares "seguirían las mismas leyes o reglas que los paréntesis ordinarios"* en tinta:

Es de advertir que el error más frecuente entre estudiantes de Secundaria que emplean el Braille para sus tareas matemáticas es "la omisión del *paréntesis auxiliar*". Entre los transcriptores profesionales, por el contrario, se produce su inverso: "abuso del *paréntesis auxiliar*". Pero mientras este segundo no altera el significado matemático —tan sólo hace más farragosa la lectura—, el primero lo altera sustancialmente:

Tabla 2-17. Transcripción Braille de expresiones algebraicas

Tinta	$\dfrac{a\,(b\,+\,c)}{b}$	
Braille	Incorrecta (por excesos)	Adecuada
	⠢⠁⠦⠣⠃⠖⠉⠜⠔⠲⠙	⠁⠣⠃⠖⠉⠜⠲⠙
Tinta	$\dfrac{a + \dfrac{b}{c}}{\dfrac{d}{e} + f}$	
Braille	Incorrecta (por excesos)	Adecuada
	⠢⠁⠖⠢⠃⠲⠉⠔⠔⠲⠢⠢⠙⠲⠑⠔⠖⠋⠔	⠢⠁⠖⠃⠲⠉⠔⠲⠢⠙⠲⠑⠖⠋⠔
Tinta	$x^{1/2}$	
Braille	Incorrecta (por excesos)	Adecuada
	⠭⠡⠢⠼⠂⠃⠔	⠭⠡⠼⠂⠃
Tinta	$\tan \dfrac{3\,a}{b}$	
Braille	Incorrecta (por excesos)	Adecuada
	⠞⠁⠝⠢⠢⠼⠉⠐⠁⠔⠲⠃⠔	⠞⠁⠝⠢⠼⠉⠐⠁⠲⠃⠔
Tinta	$\lim\limits_{\underbrace{}_{n\to\infty}} \dfrac{3n\,+\,1}{2n - 2}$	
Braille	Incorrecta (por excesos)	
	⠇⠊⠍⠄⠝⠒⠂⠼⠳⠱⠢⠢⠼⠉⠝⠖⠼⠁⠔⠲⠢⠼⠃⠝⠤⠼⠃⠔⠔	
	Adecuada	
	⠇⠊⠍⠄⠝⠒⠂⠼⠳⠱⠢⠼⠉⠝⠖⠼⠁⠔⠲⠢⠼⠃⠝⠤⠼⠃⠔	
Tinta	$\lim\limits_{\underbrace{}_{x\to 0}} \dfrac{\sin^{x2}}{x^2}$	
Braille	Incorrecta (por excesos)	
	⠇⠊⠍⠄⠭⠒⠂⠼⠚⠱⠢⠢⠎⠊⠝⠢⠭⠡⠼⠃⠔⠔⠲⠢⠭⠡⠼⠃⠔⠔	
	Adecuada	
	⠇⠊⠍⠄⠭⠒⠂⠼⠚⠱⠎⠊⠝⠭⠡⠼⠃⠲⠭⠡⠼⠃	

Dos recomendaciones podrían contribuir a evitar ambos:

— escribir la forma que se estima correcta, y proceder a su lectura oral; o

— escribir ambas formas, e intentar encontrar diferencias de significado.

La duda debe resolverse siempre en favor del exceso. Subrayémoslo:

La falta de algún *paréntesis auxiliar* altera sustancialmente el significado matemático de una expresión Braille.

2.3. DE LAS ECUACIONES E INECUACIONES, O "LA PRODIGALIDAD EN LOS ESPACIOS"

En Álgebra:

Ecuación: *"igualdad entre expresiones algebraicas". O*, también: *"dos expresiones algebraicas relacionadas por el signo"* **=** .

Inecuación: *"desigualdad —orientada o no— entre expresiones algebraicas"*. O también: *"dos expresiones algebraicas relacionadas por los signos"* **<** , **< =** , **>** , **> =** **=** o **=/** ≠ .

Un modelo frecuente en Didáctica de la Matemática para referirse a unas y otras es el de la *"balanza"*; al menos, en sus primeros estadios. Se identifican así:

Balanza	ecuación/inecuación
Platillos	miembros o cada una de las expresiones
Elementos	términos en cada miembro
Mirar la balanza desde el otro lado	ecuación/inecuación simétrica
Poner/quitar	sumar/restar términos
Cambiar un elemento de platillo	pasar un término al otro miembro
Repetir el contenido	multiplicar la ecuación/inecuación por un número positivo
Repartir en balanzas	dividir la ecuación/inecuación por un número positivo

Las técnicas de transformación en ecuaciones/inecuaciones equivalentes y su resolución exigen un permanente análisis y manipulación de sus miembros que, aun alterándolos, permitan poner de manifiesto una realidad análoga a la inicial, pero en forma explícita y clara: determinar si existen o no soluciones, cuáles o en qué condiciones, etc.

Así pues, será imprescindible:

a) El acceso inmediato a la expresión escrita (si no se quiere estar obligado a retener en la memoria el último resultado —expresión recién transformada—).

Este aspecto queda obviado al trabajar con máquina Perkins, por su condición de *“máquina de punto positivo”*.

b) Distinguir cada expresión de sus transformadas, antecedentes o consecuentes.

En tinta, basta con el emplazamiento en líneas distintas o separándolas mediante comas, punto y coma, etc. Pero en Braille será conveniente resaltar esta separación mediante sendas *líneas en blanco*.

c) Determinar *cada miembro* con claridad.

La determinación *estricto sensu* queda garantizada por el correspondiente *signo de relación*, en Braille:

Tabla 2-18. Signos de relación entre expresiones algebraicas (Ecuaciones e Inecuaciones)

Tinta		=	<	⩽	>	⩾	≠
Braille	Notación	⠶	⠪	⠪⠶	⠕	⠕⠶	⠘⠶
	Códigos	2356	246	246,2356	135	135,2356	45,2356

(Advertencia: Si en alguno de los *miembros* de una *inecuación* del tipo **>** o **=** apareciera la letra **o** minúscula (algo altamente improbable), y para evitar confusiones, deberá ir precedida en Braille del *prefijo de latina minúscula* (⠐⠕, puntos 5,135); con independencia de que esté o no afectada por un coeficiente numérico.)

Pero la distinción *clara* exige algo más: capacidad de discriminación gráfica y destreza lectora; más expuestas al error en Braille que en tinta, por dos razones:

— Mayor semejanza entre los signos Braille que entre los signos gráficos en tinta; no sólo en estos casos en concreto, sino con carácter general, dada la homogeneidad derivada de las escasas posibilidades de variabilidad con sólo 6 puntos.

— Exigencia de mayor exploración perceptiva —mayores desplazamientos relativos— debida a la *linealidad del Braille* y la necesidad de signos que traduzcan aspectos bidimensionales de la grafía en tinta. Para comprobarlo, baste un somero análisis comparativo en los ejemplos 2.2B.

Pero, con frecuencia, aparece un tercer factor perturbador:

— Insuficiente longitud de la línea Braille para albergar una ecuación o inecuación completa (algo que en tinta ocurre muy raras veces). Lo que obligaría a que un miembro deba *partirse* en líneas distintas.

En las siguientes sugerencias puede sustituirse *ecuación* por *inecuación* con plena validez:

REPRESENTACIÓN BRAILLE DE ECUACIONES E INECUACIONES Y SUS PROCESOS DE RESOLUCIÓN Criterios de simplificación y configuración	
1ºA)	Aislar la *ecuación* entre *líneas en blanco*.
1ºB)	En la resolución de un *sistema de ecuaciones*, éste debe aislarse entre *líneas en blanco*; manteniendo los conjuntos de ecuaciones que lo integren en *líneas contiguas*.
1ºB bis)	Las ecuaciones de un sistema deben figurar en líneas diferentes.
2º	El *signo de relación* deberá flanquearse por sendos *espacios en blanco*.
3º	En caso de que la partición de un miembro de la ecuación fuera inevitable —por su excesiva longitud—, se procurará que ésta no afecte a un término (p. ej.: *monomio*), o se efectuará por un signo de operación del nivel más bajo posible (en orden ascendente: $+$, $-$, $\times$, $\div$, exponente).
4º	En caso de que se hubiera *partido* el *primer miembro* o de que la línea Braille resultara previsiblemente insuficiente para contener también el *segundo miembro*, saltar a la línea siguiente, respetando un *sangrado* conveniente y reiterando el *signo de relación*.

El segundo supuesto de este último criterio/recomendación, en caso de ser necesaria su aplicación, implica anticipar un conocimiento del tamaño del *segundo miembro*, al menos aproximado. No es grave que, teniendo cabida, se remitiera a la línea siguiente: lo grave sería *tener que partirlo por imprevisión*.

La recomendación 1ºA tiene especial interés: si el *sistema* a resolver y sus *transformados* se hallan contiguos, pueden tomarse por error como *último sistema transformado* ecuaciones anteriores u operadas. Al mismo tiempo, se facilita la tarea de revisión o comprobación, e incluso de reducción —si es éste el procedimiento a emplear—.

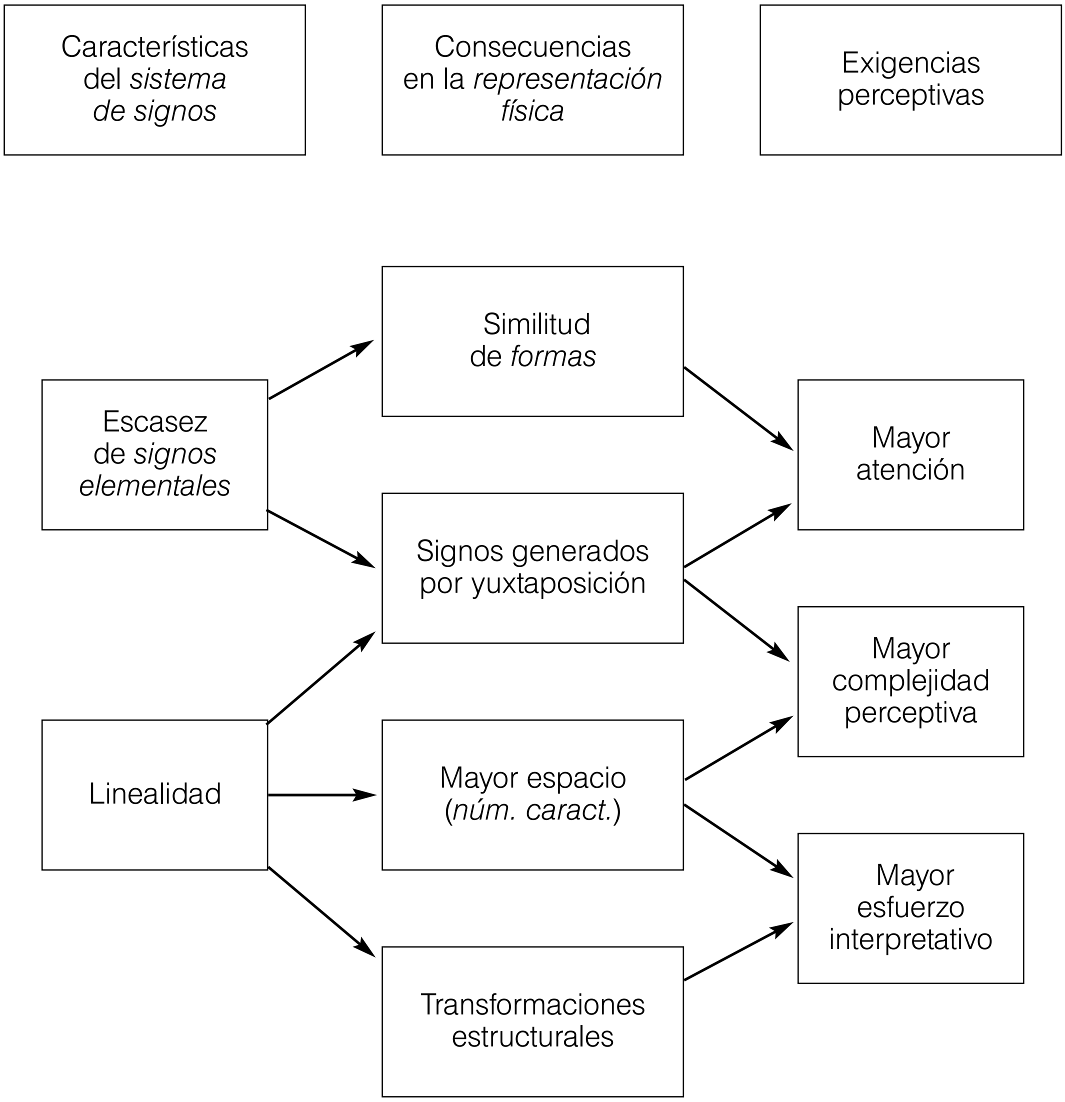
2.4. **OBJETIVO: SENCILLEZ**

En Matemáticas, con frecuencia —por no decir siempre— *claridad* y *sencillez*, tomadas de la mano, es la forma más segura de procurar la *comprensibilidad*, sin tener por qué atentar a la *precisión*.

En concreto: la sencillez expresiva —en la notación simbólica— reduce el esfuerzo decodificador, evita elementos distractivos y permite centrar la atención y el esfuerzo de comprensión en los contenidos y fines propiamente matemáticos. La plasmación de resultados corre igual suerte.

Como se ha indicado ya en repetidas ocasiones, la notación Braille presenta, respecto de la notación matemática en tinta, ciertas características que, lejos de contribuir a la *sencillez/claridad*, la dificultan:

Características y exigencias de la Notación Matemática braille



La parte izquierda del diagrama es inmodificable, por tratarse de características intrínsecas al mismo Sistema Braille.

Las dos características de la zona media están íntimamente relacionadas con la notación Braille matemática a emplear. En principio, podría parecer que también son inalterables, salvo que se modificara el código establecido oficialmente —Notación braille Unificada—; sin embargo, queda un margen de maniobra:

a) recurriendo a signos o reglas previstas en el propio Código Matemático Unificado (CMU);

b) soslayando el estricto paralelismo Tinta-Braille;

c) acudiendo a *convenios locales* de modificación de la Notación, que si bien pudieran resultar equívocos —y aun erróneos— considerados aisladamente, quedan rectificados por el contexto.

La selección de signos *suficientemente dispares para el reconocimiento háptico* no es fácil. De hecho, no existe acuerdo sobre la forma de construcción y codificación de los signos Braille en función de categorías de perceptibilidad y discriminabilidad.

Así pues, orientemos nuestra *búsqueda de la máxima sencillez* hacia la *reducción de caracteres braille*; convencidos de que: **"a menos signos, menor tiempo y energías a dedicar a la exploración e interpretación puramente formal, y a la correspondiente escritura".** Con dos guías: **"alterar lo menos posible el signo «canónico»" y "conservar cuantos más elementos básicos, mejor".**

A) SIMPLIFICACIÓN DE SUBÍNDICES

En el trabajo con dos o más variables o coordenadas, es frecuente la designación de éstas mediante *subíndices*. Sin duda, con la sana intención de abrir los horizontes de conceptos y técnicas a generalizaciones en no importa cuántas dimensiones.

Por otra parte, en el trabajo con *vectores* y *matrices* suele acudirse al cálculo en *forma analítica*; que, de ser teórico o con fines de generalización, acostumbra a tomar como *elementos* o *componentes letras con subíndices*.

Como se recogía en 2.1, el Braille cuenta con un *signo indicador de subíndice*, capaz de hacer frente a esta doble conversión de *tamaño* y *posición inferior derecha respecto de la letra-base*. Sin embargo, esta solución supone un elevado número de caracteres, con los consiguientes inconvenientes tanto en lectura como en escritura.

Se ha previsto en el CMU una expresión simplificada para los *primeros subíndices numéricos*:

Tabla 2-19. Variantes Braille de Subíndices Numéricos

Tinta	x_0	x_1	x_2	x_3
Notación ordinaria	⠭⠌⠼⠚	⠭⠌⠼⠁	⠭⠌⠼⠃	⠭⠌⠼⠉
Notación simplificada	⠭⠴	⠭⠂	⠭⠆	⠭⠒
Códigos	.,356	.,2	.,23	.,25

En Braille, las notaciones son inequívocas hasta $n = 3$; para valores sucesivos sería preciso posponer un *espacio en blanco*, si no quiere caerse en confusión con ciertos *signos de operaciones*, *paréntesis auxiliar*, etc. En cualquier caso, la recomendación del *espacio en blanco* tras el *subíndice simplificado* —salvo *exponente* o *superíndice*— favorece, al igual que se indicó para las ecuaciones en general, la legibilidad de la expresión y la distinción de términos.

Tabla 2-20. Variantes simplificadas para la representación braille de ciertos subíndices numéricos

Tinta	$X_1{}^2 - 2x_2 + 3x_3 = 0$
Notación ordinaria	⠭⠌⠼⠁⠡⠼⠃⠤⠼⠃⠭⠌⠼⠃⠖⠼⠉⠭⠌⠼⠉⠶⠼⠚
Notación simplificada	⠭⠂⠡⠼⠃⠤⠼⠃⠭⠆⠖⠼⠉⠭⠒ ⠶ ⠼⠚
Tinta	$\lvert\overrightarrow{a}\rvert = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}$
Notación ordinaria	⠸ ⠒⠂⠁⠸ ⠶ ⠶⠫⠰⠢⠁⠌⠼⠁⠡⠼⠃⠖⠁⠌⠼⠃⠡⠼⠃⠖⠁⠌⠼⠉⠡⠼⠃⠔
Notación simplificada	⠸ ⠁⠸ ⠶ ⠫⠱⠢⠁⠂⠡⠼⠃⠖⠁⠆⠡⠼⠃⠖⠁⠒⠡⠼⠃⠔
Tinta	$\det(P) = p_{1,1}p_{2,2} - p_{1,2}p_{2,1}$
Notación ordinaria	⠙⠑⠞⠣⠨⠏⠜⠶⠏⠌⠢⠼⠁⠂⠼⠁⠔⠏⠌⠢⠼⠃⠂⠼⠃⠔⠤ ⠤⠏⠌⠢⠼⠁⠂⠼⠃⠔⠏⠌⠢⠼⠃⠂⠼⠁⠔
Notación simplificada	⠙⠑⠞⠣⠨⠏⠜ ⠶ ⠏⠂⠂⠏⠆⠆⠤⠏⠂⠆⠏⠆⠂

B) NOTACIONES *LOCALMENTE SUPERFLUAS*

En la transcripción de textos matemáticos existe la preocupación de respetar al máximo el paralelismo Tinta-Braille. Esto conduce, en ocasiones, a expresiones que exigen un cuidadoso reconocimiento de signos, que tornan su lectura lenta, enojosa, desviadora de la atención.

Un ejemplo bien claro lo encontramos en las ecuaciones o fórmulas relativas al espacio bi o tridimensional, cuando se representan los *vectores unitarios* ***i***, ***j*** y ***k***. Normalmente, estas letras suelen aparecer en forma "cursiva" o "negrita"; en Braille, se recurre a encerrar dichas letras en el *indicador de cursiva* (⠔, puntos 35). Pero no existe riesgo alguno de confusión si se prescinde de este atributo.

Tabla 2-21. Representación Braille de expresiones con variantes tipográficas

Tinta	$f(t) = 2\,t\mathit{i} + 3\,t\mathit{j} - 4\,\mathit{k}$
Notación *literal*	⠋⠣⠞⠜⠶⠼⠃⠞⠔⠊⠔⠖⠼⠉⠞⠔⠚⠔⠤⠼⠙⠔⠅⠔
Notación simplificada	⠋⠣⠞⠜ ⠶ ⠼⠃⠞⠊⠖⠼⠉⠞⠚⠤⠼⠙⠅

Deben evitarse los *indicadores de variante tipográfica* siempre que no existan riesgos inmediatos de confusión.

Otro ejemplo de *notación superflua* o, al menos, *localmente superflua*, es la reiteración de índices de cualquier tipo (en sumatorios, límites, integrales, etc.) a lo largo de una cadena de igualdades o desigualdades. Una vez explicitados aquéllos, pueden omitirse hasta el momento de su aplicación específica o su sustitución por otros —fruto de descomposición, sustitución de variables, etc.—.

Tabla 2-22. Deducción de la fórmula práctica para el cálculo de la varianza (con supresión convenida de índices reiterados)

Tinta	$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} (x_i^2 - 2x_1m + m^2)}{n} =$
Expresión *inicial*	[illegible]
Tinta	$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} x_i^2 - \sum\limits_{i=1}^{i=n} 2x_im + \sum\limits_{i=1}^{i=n} m^2}{n} =$
Expresión *literal*	[illegible]
Expresión *convenida*	[illegible]
Tinta	$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} x_i^2 - 2m \sum\limits_{i=1}^{i=n} x_i + nm^2}{n} =$
Expresión *literal*	[illegible]
Expresión *convenida*	[illegible]
Tinta	$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} x_i^2}{n} - \dfrac{2m \sum\limits_{i=1}^{i=n} x_i}{n} + \dfrac{nm^2}{n} =$
Expresión *literal*	[illegible]
Expresión *convenida*	[illegible]
Tinta	$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} x_i^2}{n} - 2m \times m + m^2 =$
Expresión *literal*	[illegible]
Expresión *convenida*	[illegible]

Tabla 2-22. Deducción de la fórmula práctica para el cálculo de la varianza (con supresión convenida de índices reiterados) (continuación)

Tinta	$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} x_i^2}{n} - m^2 =$
Expresión *final*	⠢⠘⠎⠊⠶⠼⠁⠒⠊⠶⠝⠱⠭⠌⠊⠡⠼⠃⠔⠲⠝⠤⠍⠡⠼⠃

Tabla 2-23. Cálculo del límite de una sucesión (con supresión convenida de índices reiterados)

Tinta	$\text{lim.}\underbrace{\quad}_{n\to\infty}\dfrac{3n + 1}{2 - n} =$
Expresión *inicial*	⠇⠊⠍⠄⠝⠒⠂⠼⠳⠱⠢⠼⠉⠝⠖⠼⠁⠔⠲⠢⠼⠃⠤⠝⠔ ⠶
Tinta	$\text{lim.}\underbrace{\quad}_{n\to\infty}\dfrac{3 + \dfrac{1}{n}}{\dfrac{2}{n} - 1} =$
Expresión *literal*	⠇⠊⠍⠄⠝⠒⠂⠼⠳⠱⠢⠼⠉⠖⠼⠁⠲⠝⠔⠲⠢⠼⠃⠲⠝⠤⠼⠁⠔ ⠶
Expresión *convenida*	⠇⠊⠍⠄⠢⠼⠉⠖⠼⠁⠲⠝⠔⠲⠢⠼⠃⠲⠝⠤⠼⠁⠔ ⠶
Tinta	$\dfrac{\text{lim.}\underbrace{\quad}_{n\to\infty}\left(3 + \dfrac{1}{n}\right)}{\text{lim.}\underbrace{\quad}_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{n} - 1\right)} =$
Expresión *literal*	⠇⠊⠍⠄⠝⠒⠂⠼⠳⠱⠣⠼⠉⠖⠼⠁⠲⠝⠜⠲⠇⠎⠍⠄⠝⠒⠂⠼⠳⠱⠣⠼⠃⠲⠝⠤ ⠼⠁⠜ ⠶
Expresión *convenida*	⠇⠊⠍⠄⠣⠼⠉⠖⠼⠁⠲⠝⠜⠲⠇⠎⠍⠄⠣⠼⠃⠲⠝⠤⠼⠁⠜ ⠶
Tinta	3/ − 1 = − 3
Expresión *final*	⠼⠉⠲⠤⠼⠁ ⠶ ⠤⠼⠉

Tabla 2-24. Cálculo de integrales definidas
(con supresión convenida de índices reiterados)

Tinta	$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx =$
Expresión *inicial*	⠯⠼⠚⠒⠗⠱⠫⠱⠢⠗⠡⠼⠃⠤⠭⠡⠼⠃⠔⠙⠭ ⠶
Tinta	$\int_0^r r \sqrt{1 - x^2/r^2} \cdot dx =$
Expresión *literal*	⠯⠼⠚⠒⠗⠱⠳⠫⠱⠢⠼⠁⠤⠭⠡⠼⠃⠲⠗⠡⠼⠃⠔⠙⠭ ⠶
Expresión *convenida*	⠯⠱⠗⠫⠱⠢⠼⠁⠤⠭⠡⠼⠃⠲⠗⠡⠼⠃⠔⠙⠭ ⠶
Tinta	$r \int_0^r \sqrt{1 - x^2/r^2} \cdot dx =$
Expresión *literal*	⠗⠯⠼⠚⠒⠗⠱⠫⠱⠢⠼⠁⠤⠭⠡⠼⠃⠲⠗⠡⠼⠃⠔⠙⠭ ⠶
Expresión *convenida*	⠗⠯⠱⠫⠱⠢⠼⠁⠤⠭⠡⠼⠃⠲⠗⠡⠼⠃⠔⠙⠭ ⠶
Tinta	$r \int_{\pi/2}^0 \left(\sqrt{1 - \cos^2 t}\right) \times (-r\sin t)\,dt =$
Expresión *literal*	⠗⠯⠈⠏⠲⠼⠃⠒⠼⠚⠱⠫⠱⠢⠼⠁⠤⠉⠕⠎⠡⠼⠃⠞⠔⠦⠣⠤⠗⠎⠊⠝⠞⠜⠙⠞
Expresión *convenida*	⠗⠯⠈⠏⠲⠼⠃⠒⠼⠚⠱⠫⠱⠢⠼⠁⠤⠉⠕⠎⠡⠼⠃⠞⠔⠦⠣⠤⠗⠎⠊⠝⠞⠜⠙⠶
Tinta	$-r^2 \int_{\pi/2}^0 \sqrt{1 - \cos^2 t} \times \sin t\,dt =$
Expresión *literal*	⠤⠗⠡⠼⠃⠯⠈⠏⠲⠼⠃⠒⠼⠚⠱⠫⠱⠢⠼⠁⠤⠉⠕⠎⠡⠼⠃⠞⠔⠦⠎⠊⠝⠞⠙⠞⠶
Expresión *convenida*	⠤⠗⠡⠼⠃⠯⠱⠫⠱⠢⠼⠁⠤⠉⠕⠎⠡⠼⠃⠞⠔⠦⠎⠊⠝⠞⠙⠞ ⠶
Tinta	$-r^2 \int_{\pi/2}^0 \sin^2 t\,dt =$
Expresión *literal*	⠤⠗⠡⠼⠃⠯⠈⠏⠲⠼⠃⠒⠼⠚⠱⠎⠊⠝⠡⠼⠃⠞⠙⠞ ⠶
Expresión *convenida*	⠤⠗⠡⠼⠃⠯⠱⠎⠊⠝⠡⠼⠃⠞⠙⠞ ⠶

Tabla 2-24. Cálculo de integrales definidas (con supresión convenida de índices reiterados) (continuación)

Tinta	$- r^2 \int_{\pi/2}^{0} \dfrac{1 - \cos 2t}{2}\, dt =$
Expresión *literal*	⠤⠗⠡⠼⠃⠯⠈⠏⠲⠼⠃⠒⠼⠚⠱⠢⠼⠁⠤⠉⠕⠎⠢⠼⠃⠞⠔⠔⠲⠼⠃⠐⠙⠞⠶
Expresión *convenida*	⠤⠗⠡⠼⠃⠯⠱⠢⠼⠁⠤⠉⠕⠎⠢⠼⠃⠞⠔⠔⠲⠼⠃⠐⠙⠞ ⠶
Tinta	$- r^2 \times \left(\dfrac{t}{2} - \dfrac{\sin 2t}{4} \right) \Big\vert_{\pi/2}^{0} = \pi r^2/4$
Expresión *final*	⠤⠗⠡⠼⠃⠦⠣⠞⠲⠼⠃⠤⠎⠊⠝⠢⠼⠃⠞⠔⠲⠼⠙⠜⠨⠿⠈⠏⠲⠼⠃⠒⠼⠚⠱⠶ ⠈⠏⠗⠡⠼⠃⠲⠼⠙

En una cadena de transformaciones en las que se reitera un operador con índices (sumatorio, límite, integral, etc.), éstos pueden omitirse a partir de la primera expresión que los contenga, hasta que sean sustituidos (eventualmente: ejecutados).

C) SUSTITUCIÓN DE NOTACIONES

Volviendo al caso de las *variables con subíndice*, ¿por qué no emplear *letras diferentes*, en vez de *una misma letra-base con subíndices diferentes*?

Tabla 2-25. Sustitución convenida de notaciones (I).

Tinta	$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$
Expresión *ordinaria*	⠼⠉⠭⠌⠼⠁⠖⠼⠃⠭⠌⠼⠃⠤⠭⠌⠼⠉⠶⠼⠚
Expresión *simplificada*	⠼⠉⠭⠂⠖⠼⠃⠭⠆⠤⠭⠒⠶⠼⠚
Expresión *convenida*	⠼⠉⠭⠖⠼⠃⠽⠤⠵⠶⠼⠚

Incluso puede *afinarse* en la elección de la *"notación más sencilla"*. Por ejemplo: las diez primeras letras minúsculas del abecedario, al ser empleadas en ecuaciones con coeficientes numéricos requerirán del *prefijo de latina minúscula* (punto 5); lo que se evitaría tomando letras posteriores (a partir de la **k**).

Tabla 2-26. Sustitución convenida de notaciones (II)

Tinta	$\vec{v} = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$
Expresión *ordinaria*	⠒⠂⠧⠶⠼⠉⠒⠂⠑⠌⠼⠁⠖⠼⠃⠒⠂⠑⠌⠼⠃⠤⠒⠂⠑⠌⠼⠉
Expresión *simplificada*	⠧⠶⠼⠉⠐⠑⠂⠖⠼⠃⠐⠑⠆⠤⠑⠒
Expresión *convenida A*	⠧⠶⠼⠉⠐⠁⠖⠼⠃⠐⠃⠤⠉
Expresión *convenida B*	⠁⠶⠼⠉⠥⠖⠼⠃⠧⠤⠺

En ocasiones, una misma expresión permanece invariable, debiendo ser *arrastrada* a lo largo de una serie de transformaciones. Puede sustituirse entonces por una *clave* o *comodín* que la represente; deshaciendo el cambio en el lugar oportuno o al final de la cadena.

Tabla 2-27. Sustitución convenida de notaciones (III)

Tinta	$\int x^2e^xdx = x^2e^x - \int 2xe^xdx =$
Expresión *ordinaria*	⠯⠱⠭⠡⠼⠃⠐⠑⠡⠭⠙⠭ ⠶ ⠭⠡⠼⠃⠐⠑⠡⠭⠤⠯⠱⠼⠃⠭⠑⠡⠭⠙⠭ ⠶
Expresión *convenida*	⠯⠱⠭⠡⠼⠃⠐⠑⠡⠭⠙⠭ ⠶ ⠭⠡⠼⠃⠐⠑⠡⠭⠤⠯⠱⠼⠃⠭⠑⠡⠭⠙⠭⠶
Tinta	$x^2e^x - 2\int xe^xdx = x^2e^x - 2(xe^x - \int e^xdx) =$
Expresión *ordinaria*	⠭⠡⠼⠃⠐⠑⠡⠭⠤⠼⠃⠯⠱⠭⠑⠡⠭⠙⠭ ⠶ ⠶ ⠭⠡⠼⠃⠐⠑⠡⠭⠤⠼⠃⠣⠭⠑⠡⠭⠤⠯⠱⠑⠡⠭⠙⠭⠜ ⠶
Expresión *convenida*	⠨⠞⠤⠼⠃⠯⠱⠭⠑⠡⠭⠙⠭ ⠶ ⠨⠞⠤⠼⠃⠣⠭⠑⠡⠭⠤⠯⠱⠑⠡⠭⠙⠭⠜⠶
Tinta	$x^2e^x - 2(xe^x - e^x + C) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$
Expresión *ordinaria*	⠭⠡⠼⠃⠐⠑⠡⠭⠤⠼⠃⠣⠭⠑⠡⠭⠤⠑⠡⠭⠖⠨⠉⠜ ⠶ ⠶ ⠭⠡⠼⠃⠐⠑⠡⠭⠤⠼⠃⠭⠑⠡⠭⠖⠼⠃⠐⠑⠡⠭⠖⠨⠉
Expresión *convenida*	⠨⠞⠤⠼⠃⠣⠭⠑⠡⠭⠤⠑⠡⠭⠖⠨⠉⠜⠶⠭⠡⠼⠃⠐⠑⠡⠭⠤⠼⠃⠭⠑⠡⠭⠖ ⠖⠼⠃⠐⠑⠡⠭⠖⠨⠉

Podemos resumir:

SIMPLIFICACIÓN Y SUSTITUCIÓN DE NOTACIONES

Criterios y sugerencias

1º Siempre que sea posible, se tomarán las *notaciones más sencillas* o se sustituirán las dadas —si ello es posible— por otras más adecuadas (ver tablas 2-20, 2-25 y 2-26 y cuadro de preferencias en cuadro de más abajo).

2º En particular deben evitarse los *atributos diferenciadores de tipografía* siempre que no existan riesgos inmediatos de confusión (ver ejemplo en tabla 2-21).

3ºA Si deben emplearse *letras con subíndice*, y éste se halla comprendido exclusivamente entre los valores 0 y 3, se hará uso preferente de la *notación simplificada* (ver tablas 2-19 y 2-20).

3ºB) (Opcional, recomendado). Si tras el indicador de subíndice aparece un operador —que no sea el indicador de *exponente* o *superíndice*— se respetará un *espacio en blanco*.

3ºC) (Opcional). También puede emplearse la *notación simplificada* cuando el rango de subíndices es el de los números naturales (sin limitación). En cuyo caso será inexcusable la aplicación del Criterio 3ºB.

4º En una cadena de transformaciones en las que se reitera un operador con índices (sumatorio, límite, integral, etc.), éstos pueden omitirse a partir de la primera expresión que los contenga, hasta que sean sustituidos; eventualmente ejecutados (ver tablas 2-22 a 2-24).

5º Una misma expresión que permanezca invariable a lo largo de una serie de transformaciones puede sustituirse por una *clave* o *comodín* que la represente; deshaciendo el cambio en el lugar oportuno o al final de la cadena (ver tabla 2-27).

Sugerencias/Criterios de sustitución

más sencillo que		
k-z (minúscula)	a-j (minúscula) K-Z (MAYÚSCULA)	k-z (m), A-J (M) k-z (minúscula)
A-J (MAYÚSCULA)	a-j (minúscula)	A-J (M), k-z (m)
LATINA (MAYÚSCULA)	griega (M./m.)	k-z (minúscula)
latina/griega	var. tipográfica *(cursiva)*	lat./gr., LAT./GR.
letra simple	letra base con subíndice/marca	letra simple
marca	subíndice	l simple/l – b + marca
sustituir por		

2.5. **ALGORITMOS ESPECÍFICOS**

Al igual que para las operaciones aritméticas, con el paso del tiempo han ido apareciendo y cristalizando *algoritmos de cálculo algebraico*. Entendiendo por tales las *"sucesiones de reglas que, con base en las propiedades estructurales, permiten automatizar el cálculo efectivo"*; se supone que: *"reduciéndolo a operaciones elementales, sencillas de efectuar y verificar"*.

El ejemplo más conocido es la *regla de Ruffini* para la división de polinomios con divisor del tipo $x \pm a$. La *división de polinomios en una variable* se reduce fácilmente a un algoritmo aritmético con sus coeficientes. También la resolución de sistemas de ecuaciones lineales por la *regla de Cramer* debiera merecer tal título, pese a recurrir al cálculo de determinantes: reduce el cálculo algebraico a aritmético.

Los objetos algebraicos más conocidos en los niveles medios de enseñanza son los *polinomios en una variable*. Salvo la división, el cálculo con polinomios no resulta dificultoso al trabajar en tinta: la vista localiza con rapidez los términos deseados, que pueden a su vez marcarse y despreciarse en lo sucesivo. Pero el trabajo en Braille reclama un intento de estructuración de la operación, en busca de técnicas que faciliten la tarea.

En esta Sección se recogen ejemplos de estas técnicas. Algunas son simple transcripción de su versión ordinaria; junto con ellas se presentan propuestas poco conocidas, y aún originales, que —curiosamente— podrían ofrecerse como recurso algorítmico también para el trabajo en tinta.

A) DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Divisor de la forma x-a
Algoritmo ordinario

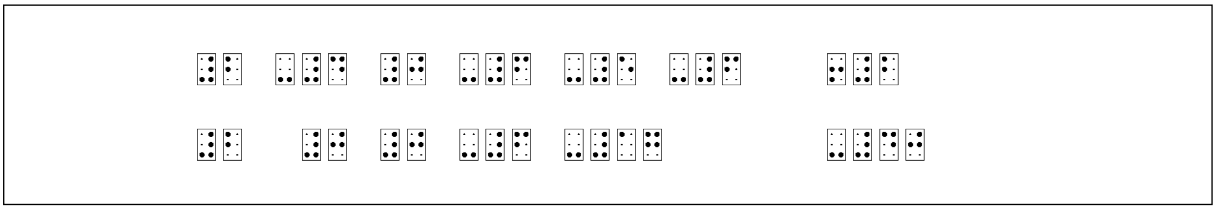
$$
\begin{array}{l|l}
2x^5 - 4x^4 - 6x^2 - 5x - 6 & x - 2 \\ \cline{2-2}
-2x^5 + 4x^4 & 2x^4 - 6x - 17 \\ \cline{1-1}
0 \qquad 0 - 6x^2 - 5x - 6 & \\
\qquad\qquad 6x^2 - 12x & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 0 - 17x - 6 & \\
\qquad\qquad\quad 17x - 34 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad -40 &
\end{array}
$$

Divisor de la forma x-a
Algoritmo de Ruffini

$$
\begin{array}{cccccc|l}
2 & -4 & 0 & -6 & -5 & -6 & +2 \\ \cline{7-7}
2 & 0 & 0 & -6 & -17 & & -40
\end{array}
$$

La realización en Braille no merece comentario alguno, si no es la sustitución de la *caja de la división* por varios espacios en blanco, como se proponía en Aritmética. Una *línea en blanco* intercalada facilita la lectura sobre el soporte de la máquina.

Tabla 2-28. División de polinomios en una variable. Divisor de la forma x-a (Versión Braille del algoritmo de Ruffini)



La *regla de Ruffini* es simplificación de un caso particular de un algoritmo general. O, si se desea: la *regla de Ruffini* puede extenderse sin gran dificultad a la *división de polinomios en una variable (caso general)*.

Éste sería el resultado al que se llegaba, mientras se perseguía una técnica que aligerara la realización en Braille de la odiosa *división de polinomios*.

Efectuemos una división cualquiera, empleando el algoritmo general de la división de polinomios.

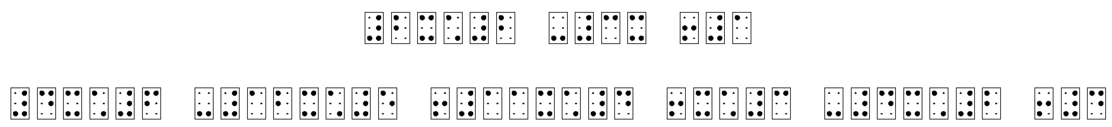
División de polinomios en una variable. Caso general.
Algoritmo ordinario

$$
\begin{array}{l|l}
4x^6 - 12x^5 + 11x^4 + x^3 - 4x^2 + 4 & 2x^2 - 3x + 1 \\
\cline{2-2}
-4x^6 + 6x^5 - 2x^4 & 2x^4 - 3x^3 + 2x + 1 \\
\cline{1-1}
0 - 6x^5 + 9x^4 + x^3 - 4x^2 + 4 & \\
\quad + 6x^5 - 9x^4 + 3x^3 & \\
\cline{1-1}
\quad 0 \quad 0 \quad + 4x^3 - 4x^2 + 4 & \\
\qquad\qquad - 4x^3 + 6x^2 - 2x & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad 0 + 2x^2 - 2x + 4 & \\
\qquad\qquad\quad - 2x^2 + 3x - 1 & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad 0 + x + 3 &
\end{array}
$$

En Braille, ya aparecería la primera dificultad al intentar escribir el divisor: la longitud de la línea (40 caracteres) sería insuficiente para contenerlo junto con el divisor; incluso este dividendo estaría un tanto justo (37 caracteres). Deberíamos, pues, haberlo antepuesto: si lo colocáramos debajo, nos dificultaría escribir el primer dividendo parcial.

¿Y dónde se escribirán los sucesivos términos del cociente?... Convendrá, por tanto, reservar para él una línea entre dividendo y divisor.

Tabla 2-29. División de polinomios en una variable. Caso general Algoritmo ordinario. Preparación.

$4x^6 - 12x^5 + 11x^4 + x^3 - 4x^2 + 4 \;\big|\; \underline{2x^2 - 3x + 1}$


En el algoritmo en tinta, pronto se observa que: respetando vacías las columnas correspondientes a grados ausentes en el dividendo, quedarían encolumnados los términos de igual grado. (En nuestro caso, sólo para $n = 1$.) Podrían, entonces, levantarse las potencias de x, y quedar un cuadro exclusivamente numérico:

División de polinomios en una variable. Caso general.
Versión esquema de coeficientes

x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x	1	x^2	x	1	
4	− 12	+ 11	+ 1	− 4	0	+ 4	+ 2	− 3	+ 1	
− 4	+ 6	− 2								
							$2x^4$	$-3x^3$	$+2x$	$+1$
0	− 6	+ 9	+ 1	− 4	0	+ 4				
	+ 6	− 9	+ 3							
	0	0	+ 4	− 4	0	+ 4				
			− 4	+ 6	− 2					
			0	+ 2	− 2	+ 4				
				− 2	+ 3	− 1				
			0	+ 1	+ 3					

Esta forma simplificada, además de suponer un importante ahorro de representación —que no de cálculo—, parece —ahora sí— tener cabida en el ancho de la línea Braille. Sin embargo, profundicemos en la simplificación antes de intentarlo definitivamente.

Observamos que: de cada *dividendo parcial* sólo nos interesan los términos de mayor grado; es decir: aquéllos que intervendrán en la sustracción. Los restantes, pueden permanecer en el *dividendo inicial*, esperando que su presencia sea reclamada (a la espera de ser *bajados*, como habitualmente se dice en la división aritmética).

División de polinomios en una variable. Caso general.
Versión esquema reducido de coeficientes

$$
\begin{array}{rrrrrrr|rrr}
x^6 & x^5 & x^4 & x^3 & x^2 & x & 1 & x^2 & x & 1 \\
4 & -12 & +11 & +1 & -4 & 0 & +4 & 2 & -3 & +1 \\
\cline{8-10}
-4 & +6 & -2 & & & & & & & \\
\cline{1-3}
 & & & & & & & \multicolumn{3}{l}{2x^4 \quad -3x^3 \quad +2x \quad +1} \\
-6 & +9 & +1 & & & & & & & \\
+6 & -9 & +3 & & & & & & & \\
\cline{3-5}
 & & +4 & -4 & 0 & & & & & \\
 & & -4 & +6 & -2 & & & & & \\
\cline{4-6}
 & & & 2 & -2 & +4 & & & & \\
 & & & -2 & +3 & -1 & & & & \\
\cline{5-6}
 & & & & 1 & +3 & & & &
\end{array}
$$

El esquema cada vez se asemeja más a la *división aritmética*. Dejando a un lado la posibilidad de que alguno de los coeficientes pueda constar de más de una cifra, el escollo fundamental se encuentra en los signos de los productos parciales: en la *división aritmética* se efectúan sustracciones; aquí: adiciones, al haber cambiado el signo, por resultar el cálculo mental con enteros más sencillo en forma aditiva que sustractiva.

Pero esta modificación de signos podría obviarse: basta cambiarlos en el divisor, de una vez por todas (Ruffini). Así, podremos multiplicar sin cuidado el coeficiente obtenido para el término en el cociente por cada coeficiente del divisor, y *"sumar este producto al oportuno coeficiente del dividendo parcial"*.

División de polinomios en una variable. Caso general.
Versión esquema simplificado de coeficientes

$$
\begin{array}{rrrrrrr|rrr}
x^6 & x^5 & x^4 & x^3 & x^2 & x & 1 & x^2 & x & 1 \\
+4 & -12 & +11 & +1 & -4 & 0 & +4 & -2 & +3 & -1 \\
\cline{8-10}
 & -6 & +9 & +1 & & & & & & \\
 & & 4 & -4 & 0 & & & \multicolumn{3}{l}{2x^4 - 3x^3 + 2x + 1} \\
 & & & 2 & -2 & +4 & & & & \\
 & & & & 1 & +3 & & & &
\end{array}
$$

Por último: los *extremos* derecha o finales en la porción *útil* de cada *dividendo parcial* es mera copia del *dividendo inicial*. Podríamos suprimirla, y efectuar la suma en su momento con ese mismo coeficiente, *sin moverlo de su sitio*.

División de polinomios en una variable. Caso general.
Algoritmo de coeficientes

$$
\begin{array}{rrrrrrr|rrr}
x^6 & x^5 & x^4 & x^3 & x^2 & x & 1 & x^2 & x & 1 \\
4 & -12 & 11 & 1 & -4 & 0 & 4 & -2 & 3 & -1 \\
\cline{8-10}
 & -6 & 9 & . & & & & & & \\
 & & & 4 & . & . & & \multicolumn{3}{l}{2x^4 - 3x^3 + 2x + 1} \\
 & & & & 2 & -2 & . & & & \\
 & & & & & & 1+3 & & &
\end{array}
$$

Parece que la simplificación ha llegado a su culmen: lo que era una sucesión de cálculos algebraicos se ha convertido en aritméticos. Podemos enunciar las *reglas* de este *algoritmo*.

ALGORITMO DE COEFICIENTES PARA LA DIVISIÓN DE POLINOMIOS
EN UNA VARIABLE

Fase preparatoria

Si existen coeficientes no enteros:

a) no racionales: racionalizar todos los coeficientes, y proceder después según b).
b) racionales: multiplicar todos los coeficientes por el m.c.m. de los denominadores.

1°) Se escriben completas las potencias de la variable de dividendo y divisor, en una misma línea y orden decreciente.
(Braille: respetando algunos espacios en blanco entre las del dividendo y las del divisor. Si el total de caracteres y espacios de separación superara la longitud de la línea, podría simplificarse la escritura potencial ordinaria.)

2°) Bajo ellas, se escriben los correspondientes coeficientes de dividendo y divisor; los de éste, con signo cambiado. (En caso de no aparecer tal potencia en uno u otro, se le reconoce 0 como coeficiente.)
(Braille: En caso de ser insuficiente la longitud de la línea, pueden adoptarse criterios de simplificación: *"se omiten los signos* **+** *para coeficientes positivos"*, "se omite el signo de número", etc.)
(Tinta: 2° bis: Se traza la *caja de la división*, que separe dividendo de divisor, y ambos del cálculo subsiguiente.)

Fase operatoria

Mientras sean distintos de 0 en el dividendo (inicial o parcial) los coeficientes correspondientes a grados mayor o igual al grado del divisor:

3°) Dividir el coeficiente de la izquierda (mayor grado) del dividendo (inicial o parcial) por el coeficiente de la izquierda (mayor grado) del divisor[2]. Cambiar de signo el resultado, y escribirlo como coeficiente del cociente en la primera línea vacía; seguido de la parte literal: cociente entre las potencias de la variable que encabezan aquéllos.
(Braille: respetar una *línea en blanco* entre términos del cociente.)

4°) Sucesivamente, de izquierda a derecha, multiplicar este coeficiente obtenido para el cociente por cada coeficiente en el divisor, y sumar el producto al coeficiente del mismo lugar en el dividendo (parcial o inicial). El resultado, escribirlo bajo el correspondiente coeficiente del dividendo en la nueva línea del cociente. El resultado de la izquierda deberá ser 0, y no se escribe.
(Braille: si la longitud de la línea era insuficiente y se adoptaron criterios de simplificación en 2°, aplicarlos también aquí.)

5°) Si quedan coeficientes no tratados en el dividendo:

a) Opcional: escribir el de orden siguiente a la derecha de los obtenidos en 4°
b) volver a 3°.

6°) Si no quedan coeficientes no tratados en el dividendo, hemos terminado.

7°) Resultado final:

a) el cociente es la suma de los monomios escritos en columna bajo el divisor;
b) el resto tiene por coeficientes los presentes en la última línea, y por *parte literal* la correspondiente a cada columna de éstos.

---

[2] Se entiende "distinto de 0". La división siempre es posible, supuesto que se trabaje con polinomios de coeficientes cuanto menos racionales.

Advertencia: si fue necesario operar preliminarmente los coeficientes de dividendo y divisor —por existir denominadores—, los del *resto* sufrieron el mismo efecto.

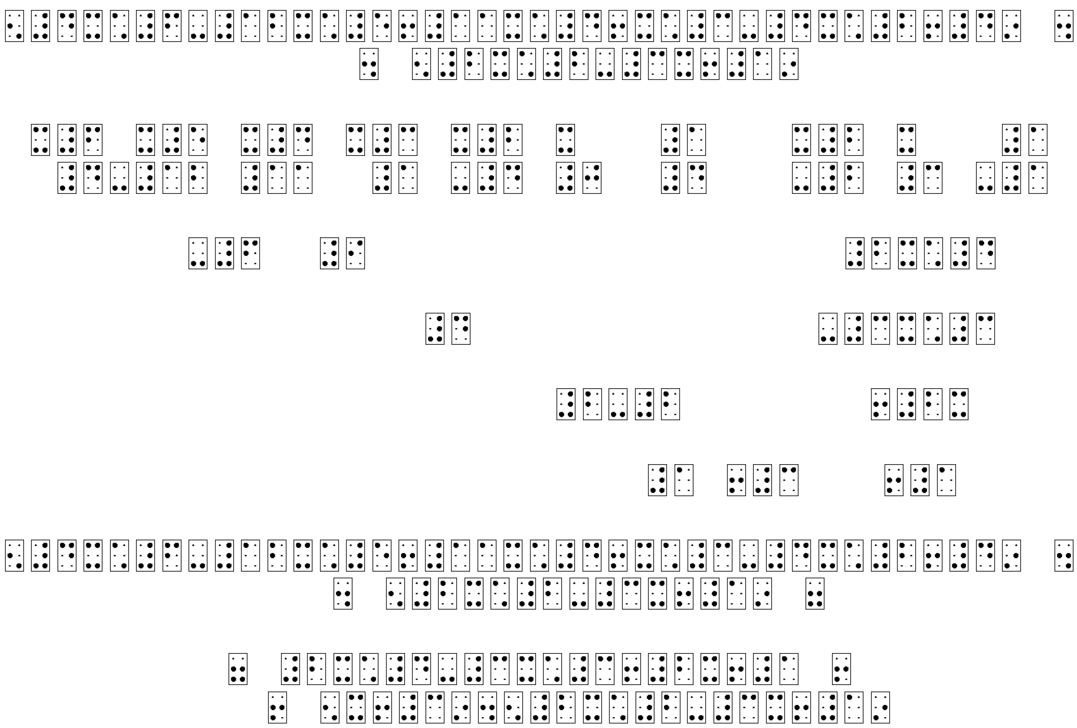
Llega el momento de abordar su versión Braille. Sólo tropezamos con un inconveniente: la escritura del cociente. Pero esto tiene una fácil solución: escribir los términos en columna, a medida que se van calculando; lo que también evitaría la enojosa manipulación de retroceder líneas.

Tabla 2-30. División de polinomios en una variable. Caso general. Algoritmo de coeficientes

$$\frac{4x^6 - 12x^5 + 11x^4 + x^3 - 4x^2 + 4}{2x^2 - 3x + 1} =$$

$$\begin{array}{ccccccc|ccc}
x^6 & x^5 & x^4 & x^3 & x^2 & x & 1 & x^2 & x & 1 \\
4 & -12 & 11 & 1 & -4 & 0 & 4 & -2 & 3 & -1 \\
\cline{8-10}
 & & & & & & & & & \\
 & -6 & 9 & . & & & & 2x^4 & & \\
 & & & 4 & . & . & & -3x^3 & & \\
 & & & & 2 & -2 & . & +2x & & \\
 & & & & & 1 & +3 & +1 & &
\end{array}$$

$$\frac{4x^6 - 12x^5 + 11x^4 + x^3 - 4x^2 + 4}{2x^2 - 3x + 1} = 2x^4 - 3x^3 + 2x + 1 + \frac{x + 3}{2x^2 - 3x + 1}$$



Se han conservado las partes literales en el cociente. No sólo para facilitar la reconstrucción final, sino, sobre todo, para evitar errores en el grado, muy frecuentes cuando -como en este caso- es incompleto.

La expresión final indicada *en línea* resume la operación realizada y la importante relación que liga sus términos.

Si aplicáramos este algoritmo al ejemplo inicial de este Apartado, tendríamos:

División de polinomios con divisor de la forma x-a
Aplicación del algoritmo de coeficientes

$$\frac{2x^5 - 4x^4 - 6x^2 - 5x - 6}{x - 2}$$

$$\begin{array}{cccccc|cc}
x^5 & x^4 & x^3 & x^2 & x & 1 & x & 1 \\
2 & -4 & 0 & -6 & -5 & -6 & -1 & +2 \\ \cline{7-8}
 & & & . & . & . & +2x4 & \\
 & & & & -17 & . & -6x & \\
 & & & & & -40 & -17 &
\end{array}$$

$$\frac{2x^5 - 4x^4 - 6x^2 - 5x - 6}{x - 2} = 2x^4 - 6x - 17 + \frac{-40}{x - 2}$$

Al ser 1 el coeficiente de x en el divisor (– 1, en el esquema), los coeficientes del cociente coinciden con *los únicos números presentes en el interior*. Luego podríamos ignorar éstos, *girar* y deslizar los coeficientes del cociente, hasta que aparecieran bajo los del dividendo, haciendo coincidir potencias de x. Completando con 0 los espacios vacíos, se obtendría el *esquema de Ruffini (tabla 2-28)*.

B) MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

La multiplicación de polinomios, aun en una variable, es algo tedioso. Multiplicar cada monomio del primer factor por cada uno del segundo, cuidando de no omitir ninguno ni errar en el producto de coeficientes y suma de exponentes; simplificar términos semejantes: localizarlos -y *marcarlos*-, operar; y, antes o después: ordenar el polinomio resultante.

La operación en Braille, como es de prever, se torna fastidiosa, propensa al error y exigente de continuas comprobaciones, aun cuando se trate de factores nada exagerados. No admite alteraciones o adiciones ulteriores a su forma original. Algo tan simple y útil como pueda ser *subrayar*, *marcar con un punto*, *trazar líneas de correspondencia*, *¡tachar!*... está vedado al usuario del Braille: debe reescribir, mal-borrar, guardar en memoria...

Al desconocedor del sistema, estas observaciones pueden hacerle pensar que las tareas matemáticas en Braille son algo heroico. No. Es cuestión de práctica. Y de técnicas específicas; algunas, quizás sean *exportables* al trabajo *en tinta*. He aquí una propuesta específica.

$$
\begin{aligned}
&(2x^2 + 3x - 5)(4x^2 - x - 3) = \\
&= 8x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 12x^3 - 3x^2 - 9x - 20x^2 + 5x + 15 = \\
&= 8x^4 + 10x^3 - 29x^2 - 4x + 15
\end{aligned}
$$

la tarea se aligera mediante los simples artificios de emplazar los factores en líneas sucesivas y respetar un *espacio en blanco* entre ellos; se facilita así la localización de cada monomio a operar (recordemos que en Braille es poco menos que imposible *leer* o *mirar* al tiempo que *escribir*.). Al no existir riesgo de confusión, puede también prescindirse de los paréntesis unificadores: la individuación viene dada por el contexto de distribución espacial.

Multiplicación de polinomios
Disposición bidimensional

$$
\begin{array}{l}
2x^2 \quad + 3x \quad - 5 \\
\underline{4x2 \quad - x \quad - 3} \\
8x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 12x^3 - 3x^2 - 9x - 20x^2 + 5x + 15 = \\
8x^4 + 10x^3 - 29x^2 - 4x + 15
\end{array}
$$

Llega el momento de la comprobación (algo más que un simple *repaso*). Partiendo del resultado, podemos preguntarnos sobre la génesis de cada término, recorriendo el proceso en sentido inverso:

Multiplicación de polinomios en una variable
Fase de comprobación

$$
\begin{array}{lll}
8x^4 & = & 2x^2 \cdot 4x^2 \\
10x^3 & = & -2x^3 + 12x^3 = \\
 & = & 2x^2 \cdot (-x) + 3x \cdot 4x^2 \\
-29x^2 & = & -6x^2 - 3x^2 - 20x^2 = \\
 & = & 2x^2 \cdot (-3) + 3x \cdot (-x) + (-5) \cdot 4x^2 \\
-4x & = & -9x + 5x = 3x \cdot (-3) + (-5) \cdot (-x)) \\
15 & = & (-5) \cdot (-3)
\end{array}
$$

Pero esta organización de resultados parciales sugiere cómo pudieron haberse formado en nuestra distribución espacial cada producto de monomios en el producto expandido, primero, y en el resultado reducido, después. Se apuntan rasgos de una rutina un tanto inesperada. Un análisis cuidadoso alumbra una serie de sencillos esquemas:

Multiplicación de polinomios en una variable
Método de esquemas sucesivos

$2x^2 \quad +3x \quad -5$ $4x^2 \quad -x \quad -3$	$2x^2 \quad +3x \quad -5$ $4x^2 \quad -x \quad -3$	$2x^2 \quad +3x \quad -5$ $4x^2 \quad -x \quad -3$	$2x^2 \quad +3x \quad -5$ $4x^2 \quad -x \quad -3$	$2x^2 \quad +3x \quad -5$ $4x^2 \quad -x \quad -3$
$8x^4$	$+10x^3$	$-29x^2$	$-4x$	15

Cada término del resultado se corresponde con un esquema simple. La sucesión puede asemejarse al despliegue, primero, y compresión, después, de una especie de "X" (en tinta) o "haz". Un "muelle" o "gusano" que avanza de un extremo a otro del rectángulo de representación, llegando a extenderse en toda su longitud, para recogerse después progresivamente.

Muy pronto se observa que basta con representar los dos polinomios una única vez y en distribución espacial adecuada, a la que se incorporan tales líneas de forma imaginaria, cual superposición de los esquemas simples. Los términos del resultado se corresponden verticalmente, como en aquéllas, con los centros de simetría de cada "haz" o "X". Es conveniente ser *generoso* en el espacio de separación entre términos de los factores, en previsión de coeficientes amplios:

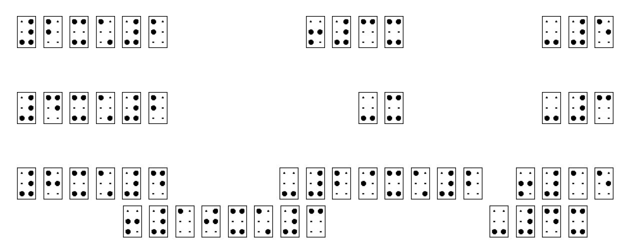
Multiplicación de polinomios en una variable
Método del esquema dinámico

$$
\begin{array}{ccccc}
2x^2 & & +\,3x & & -\,5 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
4x^2 & & -\,x & & -\,3 \\
8x^4 & +\,10x^3 & -\,29x^2 & -\,4x & +\,15
\end{array}
$$

En Braille, la longitud del resultado puede exceder los 38-40 caracteres permitidos por línea (no sería éste el caso: 30). Se emplearían entonces dos líneas contiguas, pero respetando la verticalidad productos - centros de simetría:

Tabla 2-31. Multiplicación de polinomios en una variable
Método del esquema dinámico

$$
\begin{array}{ccccc}
2x^2 & & +\,3x & & -\,5 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
4x^2 & & -\,x & & -\,3 \\
8x^4 & +\,10x^3 & -\,29x^2 & -\,4x & +\,15
\end{array}
$$



Análogamente a como se procede *en tinta* cuando quiere intercalarse una expresión sin espacio para ello; sólo que aquí debe hacerse en la línea inferior.

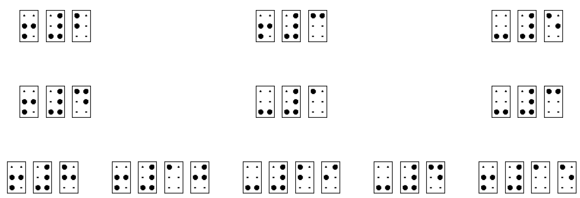
Y dos regalos adicionales:

Puede calcularse por separado cada monomio del producto, sin más que *localizar su lugar definitivo*, localizar asimismo su correspondiente *nudo de simetría* y *trazar* las oportunas líneas imagen de productos parciales (por supuesto: efectuar éstos, y simplificar); tal como muestra cada uno de los esquemas de arriba.

Ya que el grado se identifica con emplazamiento, puede prescindirse de la variable:

Tabla 2-32. Multiplicación de polinomios en una variable
Algoritmo del esquema dinámico de coeficientes

+ 2		+ 3		– 5
·	·	·	·	·
+ 4		– 1		– 3
+ 8	+ 10	– 29	– 4	+ 15



Conviene resaltar el papel que, de nuevo, se confiere a la imaginación, que *traza líneas donde no las hay*, ni tal vez convenga trazar; porque no se puede —caso del Braille— o porque causarían confusión —salvo que se empleen colores diversos, lápiz y goma o se trabaje sobre el tablero—.

ALGORITMO DEL "ESQUEMA DINÁMICO DE COEFICIENTES"
PARA LA MULTIPLICACIÓN DE DOS POLINOMIOS EN UNA VARIABLE

1º Se escriben los coeficientes de ambos polinomios:
- — ordenados en orden creciente o decreciente;
- — indicando con un 0 o reservando el espacio de los términos que falten;
- — respetando entre cada dos coeficientes un espacio (suficiente como para intercalar un tercero);
- — en líneas separadas por una línea en blanco, y de forma que coincidan en columna los coeficientes correspondientes a términos de igual grado.

2º (Opcional). Se marcan con un punto en la línea media las columnas correspondientes a los coeficientes y las intermedias a éstas.

3º Para cada uno de estos puntos (marcados o imaginados), se efectúa la suma de todos los productos posibles entre coeficientes de la línea superior y la inferior, tales que los segmentos (imaginarios) que los unen pasaran por dicho punto. El resultado se anota en una línea por debajo de la del segundo polinomio

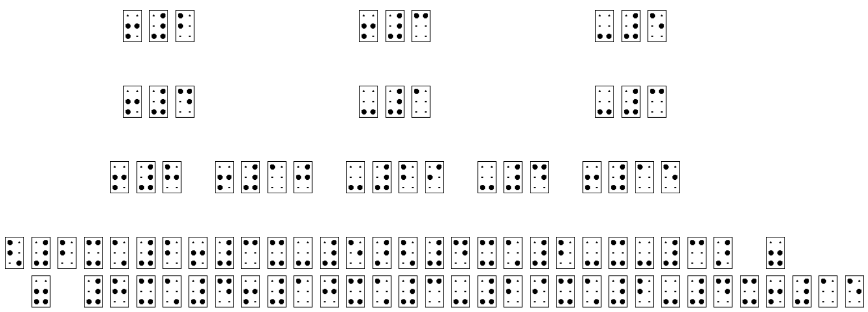
(en Braille: si este resultado es previsible que exceda el espacio a él destinado -con riesgo de desplazar a los sucesivos-, se pasa a la línea inmediata inferior, respetando siempre su lugar.)

4º El polinomio producto de los dos dados viene expresado por:
- — estos resultados como sus coeficientes,
- — mismo orden (creciente/decreciente) que los polinomios factores,
- — cuyo grado es igual a la suma de los grados de éstos.

Al igual que para los algoritmos de las operaciones aritméticas, es conveniente explicitar *en forma lineal* la operación efectuada:

Tabla 2-33. Multiplicación de polinomios en una variable
Algoritmo del esquema dinámico de coeficientes

$$+2 \qquad +3 \qquad -5$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$+4 \qquad -1 \qquad -3$$
$$+8 + 10 - 29 - 4 + 15$$
$$(2x^2 + 3x\text{-}5)\ (4x^2\text{-}x\text{-}3) = 8x^4 + 10x^3 - 29x^2 - 4x + 15$$



2.6. **OTRAS NOTACIONES**

2.6.1. FUNCIONES

A caballo entre el Álgebra y el Análisis, encontramos el ilimitado campo de las *funciones* y *correspondencias*.

Una *función* o *correspondencia* de un conjunto A en otro B puede definirse de dos formas fundamentales:

— Conjunto de *pares ordenados*, en los que el *primer elemento* pertenece a A y el *segundo elemento* pertenece a B.

— **Ley** o **propiedad** que relaciona *elementos de A* con *elementos de B*.

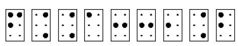
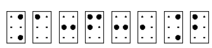
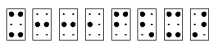
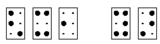
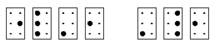
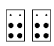
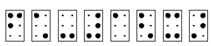
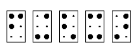
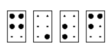
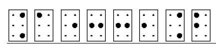
A su vez, esta segunda forma, cuando A y B son *conjuntos numéricos* ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$; o *estructuras vectoriales* o *modulares* que los tengan como *dominio de escalares*), puede venir expresada mediante una *fórmula*; en particular: una *ecuación* o *inecuación*.

A nuestros propósitos, no distinguiremos entre *función*, *correspondencia* y *relación*.

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $B = \{1, 2, 4, 8, 16, 32,$ $f\colon A \rightarrow B$; o $A \xrightarrow{f} B$	
Definición *por extensión* o *mediante pares* $f = \{(0, 2), (1, 4), (3, 8), (7, 16)\}$	
Definiciones *por comprensión* o *mediante una ley*	
Conceptual	simbólica
f es la función que *a cada elemento de A le hace corresponder su doble más 2, si existe en B*	*$f\colon x \rightarrow 2x + 2$ ó* *$f(x) = 2x + 2$*

Las notaciones Braille son inequívocas, y de difícil —por no decir *imposible* simplificación—:

Tabla 2-34. Funciones y correspondencias

Concepto	Representación tinta	Braille	
		Representación	Códigos
Función	$f\colon A \rightarrow B$		.,46,.,25,25,2,.
	$A \xrightarrow{f} B$		.,25,.,25,2,.
	$x \rightarrow f\,(x)$		.,25,25,2,.
Par ordenado	(x, y)		126,.,2,.,345
Conjunto (de pares)	$\{..,..\}$		5,123,.456,2
Idéntico a	$\equiv$		2356,2356
Función inversa	$f^{-1}(x)$		.,16,36,3456,1,.
			.,346,.
Composición de funciones	$g^{o}f$		.,6,23,.
Aplicación biyectiva	$A \longleftrightarrow B$		.,5,25,25,2,

En las *fórmulas* o *expresiones simbólicas* de las *funciones numéricas* pueden intervenir cualesquiera de las *operaciones aritmético-algebraicas* y sus correspondientes notaciones. A partir de ellas o de otros conceptos algebraico-analíticos se definen o construyen *funciones trascendentes*; entre las más frecuentes —en los niveles medios de enseñanza— tenemos:

Tabla 2-35. Ejemplos de funciones trascendentes

Función	Representación tinta	Braille	
		Representación	**Códigos**
Parte entera	int (x)	⠊⠝⠞⠣⠭⠜	...
Exponencial de base a	a^x	⠁⠡⠭	.,16,.
	$exp_a(x)$	⠑⠭⠏⠁⠱⠣⠭⠜	.,156,.
Exponencial de base *e*	e^x	⠑⠡⠭	.,16,.
	exp(x)	⠑⠭⠏⠣⠭⠜	.,156,.
Logaritmo en base a	$log_a x$	⠇⠕⠛⠁⠱⠭	.,156,.
Logaritmo decimal	logx	⠇⠕⠛⠭	...
Logaritmo neperiano (base *e*)	ln.x	⠇⠝⠄⠭	...
	ln(x)	⠇⠝⠣⠭⠜	...
Antilog. en base a	$alog_a x$	⠁⠇⠕⠛⠁⠱⠭	...
Antilog. decimal	alog.x	⠁⠇⠕⠛⠭	...
Antilog. neperiano	aln.x	⠁⠇⠝⠄⠭	...
	aln(x)	⠁⠇⠝⠣⠭⠜	,,,
Seno (circular)	sinx	⠎⠊⠝⠭	...
	sin(x)	⠎⠊⠝⠣⠭⠜	...
Arco seno	asinx	⠁⠎⠊⠝⠭	...
	asin(x)	⠁⠎⠊⠝⠣⠭⠜	...
Tangente	tanx	⠞⠁⠝⠭	...
	tan(x)	⠞⠁⠝⠣⠭⠜	...
Arco tangente	atanx	⠁⠞⠁⠝⠭	...
	atan(x)	⠁⠞⠁⠝⠣⠭⠜	...
Seno hiperbólico	shx	⠎⠓⠭	...
Argumento seno hiperbólico	ashx	⠁⠎⠓⠭	...

Excepción hecha de los casos explicitados, no es preciso comentario alguno acerca de su transcripción Braille, ya que se ajustan a normas generales. Salvo la *“no necesidad de reflejar el menor tamaño y posición superior derecha de los «argumentos» («arcos»)”* que aparecen en la mayoría de ellas; el *punto de abreviatura* sirve de separación e indicador al mismo tiempo de los pormenores gráficos; como es obvio, si fueran expresiones *complejas* deberían encerrarse entre *paréntesis auxiliares*. (No obstante, la tendencia actual —en tinta— es la de encerrar dichos argumentos entre paréntesis, en concordancia con la notación en los *editores de programas informáticos de cálculo*.)

Completaremos por el momento nuestro inventario con las notaciones habitualmente empleadas en Análisis:

Tabla 2-36. Notaciones frecuentes en Análisis Matemático

Concepto	**Representación tinta**	**Braille**	
		Representación	**Códigos**
Tiende a	$x \to a$	⠭⠒⠂⠁	1346,25,2,1
n crece indefinidamente (tiende a inf.)	$n \to \infty$	⠝⠒⠂⠼⠳	25,2,3456,1256
Límite, cuando **x** tiende a **c**	$\lim\limits_{x\to c}.$	⠇⠊⠍⠄⠭⠒⠂⠉⠱	123,24,134,3 .,.,156,.
Límite por la izquierda	$\lim\limits_{x\to a^-}.$	⠇⠊⠍⠄⠭⠒⠂⠁⠤⠄⠱	...,36,3,156
	$\lim\limits_{x\uparrow a}.$	⠇⠊⠍⠄⠭⠸⠁⠁⠱	..,456,1,.,156
Límite por la derecha	$\lim\limits_{x\to a^+}$	⠇⠊⠍⠄⠭⠒⠂⠁⠖⠄⠱	..,235,3,156
	$\lim\limits_{x\downarrow a}.$	⠇⠊⠍⠄⠭⠸⠄⠁⠱	.,456,3,.,156
Límite superior	$\overline{\lim.}$	⠈⠉⠇⠊⠍⠄	4,14,...
Límite inferior	$\underline{\lim.}$	⠠⠤⠇⠊⠍⠄	6,36,...
Derivada *total* respecto de x	$\dfrac{d}{dx}$	⠙⠲⠢⠙⠭⠔	145,256,26, ,145,.,35
	D_x	⠨⠙⠌⠭	46,145,34,.
Derivada *parcial* (*respecto de x*)	∂	⠸⠙⠲⠢⠸⠙⠭⠔	456,145,256, 26,456,145, ,.,35
Operador *nabla*	∇	⠈⠻	4,12456
Operador *laplaciana*	Δ	⠸⠦	456,236

Tabla 2-36. Notaciones frecuentes en Análisis Matemático (continuación)

Concepto	Representación tinta	Braille	
		Representación	Códigos
Integral indefinida	$\int$	⠯⠱	12346,156
Integral doble	$\int\int$	⠯⠯⠱	12346,12346, ,156
Integral definida entre a y b	$\int_a^b$	⠯⠁⠒⠃⠱	12346,.,25, ,.,156

2.6.2. LÓGICA Y TEORÍA DE CONJUNTOS

Como se comentaba en la Introducción, a finales de los años 1960 la Teoría de Conjuntos irrumpiría con fuerza en los niveles medios y aun elementales de enseñanza, acompañada de una cohorte interminable de nuevos términos y signos. En aquellos momentos, no sólo no se preveía la vigencia que unos y otros tendrían en el curriculum; antes bien, matemáticos y pedagogos estaban persuadidos de su instalación definitiva.

Al cabo de 30 años, aquella —en principio— violenta invasión fue digerida por el edificio general de las Matemáticas Básicas, tamizada por los filtros de las *aplicaciones prácticas*: se ha asimilado su enfoque estructural, pero se ha rechazado buena parte de sus rigores formales, de su léxico y, sobre todo, de sus notaciones específicas.

Sin embargo, los profesionales relacionados con la enseñanza de ciegos debieron hacer frente a la necesidad de nuevas notaciones en Braille desde los primeros pasos de la reforma. Sin poder esperar a “sentencias históricas de «reducción de pena» en la inflación simbólica”, idearon versiones Braille para cada uno de los más del centenar de *signos específicos*. La tarea fue ardua, pero los resultados pueden hoy calificarse de loables: además de resolver cumplidamente el desafío, quizás haya sido la mejor ocasión que el Braille ha tenido como sistema de manifestar su potencialidad.

A título de referencia, se presentan en el cuadro siguiente las notaciones que, para estas ramas de la Matemática, no es difícil encontrar en algunos textos de Enseñanza Media de nuestros días.

Tabla 2-37. Conjuntos y relación de pertenencia

Concepto	Representación tinta	Braille	
		Representación	Códigos
Conjunto	$\{.\}$	⠐⠇⠄⠄⠄⠸⠂	5,123,.,456,2
Conjunto vacío	Ø	⠸⠚	456,245
Conjunto (clase) universal	***U***	⠸⠥	456,136

Tabla 2-37. Conjuntos y relación de pertenencia (continuación)

Concepto	Representación tinta	Braille	
		Representación	Códigos
Complementario del conjunto A	$C_{A\square}$ $\overline{A\square}$ A'	⠰⠉⠨⠁ ⠈⠉⠨⠁ ⠨⠁⠳	56,14,. 4,14,. .,1256
Complementario de A en B	$C_{B\square}A\square$	⠰⠉⠨⠃⠱⠨⠁	56,14,.,156,.
Unión	$\cup$	⠸⠜	456,345
Unión de una familia de conjuntos	$\bigcup_{i\in I\square} A_{i\square}$	⠿⠜⠊⠣⠂⠨⠊⠱⠨⠁⠌⠊	123456,345, ,..,156,.
Intersección	$\cap$	⠸⠱	456,156
Intersección de una familia	$\bigcap_{i\in I\square} A_{i\square}$	⠿⠱⠊⠣⠂⠨⠊⠱⠨⠁⠌⠊	123456,156, ,..,156,.
Diferencia (de conjuntos)	$\backslash$	⠐⠄	5,3
Diferencia simétrica	$\triangle$	⠰⠲	4 56,256
Producto cartesiano	X	⠨⠦	46,236
Pertenece a (es elemento de)	$\in$	⠣⠂	126,2
No pertenece a	$\notin$	⠘⠣⠂	45,126,2
Comprende a (tiene como elemento)	$\ni$	⠐⠜	5,345
no comprende a	$\not\ni$	⠘⠐⠜	45,5,345
Incluido estrict. (parte, subconjt.)	$\subset$	⠣⠄	126,3

Tabla 2-37. Conjuntos y relación de pertenencia (continuación)

Concepto	Representación tinta	Braille	
		Representación	Códigos
Incluye estrict. a (contiene)	$\supset$	⠠⠜	6,345
Incluido/ igual	$\subseteq$	⠣⠆	126,23
Incluye o es igual a	$\supseteq$	⠰⠜	56,345
No incluido ni igual a	$\not\supseteq$	⠘⠣⠆	45,126,23
No incluye estrict. a	$\not\supset$	⠘⠠⠜	45,6,345

Tabla 2-38. Relaciones

Concepto	**Representación tinta**	**Braille**	
		Representación	**Códigos**
Par ordenado	(a, b)		126,.,2,.,345
Producto cartesiano	X		46,236
Relacionado con	$\sim$		5,26,3
Conjunto cociente (resp. de ~)	A/~		.,6,2,.
Estrict. anterior (rel. de orden)	$\prec$		5,246
Anterior o igual a	$\preccurlyeq$		56,246
No anterior ni igual a	$\npreceq$		45,56,246
Estrict. posterior	$\succ$		135
Posterior o igual a	$\succcurlyeq$		135,23
No posterior ni igual a	$\nsucceq$		45,135,23
Coordinable con	$\leftrightarrow$		256,25,235 5,26,33
Cardinal de un conjunto A	#A		3456,13,.
Infinito	∞		3456,1256
Alef (card. Transfin.)	$\aleph$		6,1256

Tabla 2-39. Lógica simbólica

Concepto	Representación tinta	Braille	
		Representación	Códigos
Tal que	/ …	⠠⠂	6,2
Para todo (cuantif. univ.)	$\forall$	⠨⠄	46,3
No existe	$\nexists$	⠘⠨⠢	45,46,26
Existe un único	$\exists!$	⠨⠆	46,23
Existe algún (cuantif. exist.)	$\exists$	⠨⠢	46,26
Proposición verdadera	$\curlyvee$	⠸⠎	456,234
Proposición falsa	$\curlywedge$	⠸⠣	456,126
Tautología	$\vdash$	⠸⠒	456,25^
Y (conjunción lógica, &)	$\wedge$	⠰⠂ ⠸⠢	56,2 456,26
O (disyunción lógica, *or*)	$\vee$	⠰⠄ ⠸⠊	56,3 456,24
Disyunción excluyente (*xor*)	$\overline{\vee}$	⠰⠴	56,356
Negación lógica (*not*)	$\neg$ $\neg$ $\neg$	⠐⠂	5,2
Implicación lógica (*si..., entonces*)	$\Rightarrow$	⠒⠕	25,135
Consecuencia lógica (*porque*)	$\Leftarrow$	⠪⠒	246,25
Equivalencia lógica (*si, y sólo si*)	$\Leftrightarrow$	⠪⠒⠕	246,25,135

A los cuales habría que añadir los correspondientes a funciones (ver Sección anterior).

Merecen ser resaltadas las *reglas de formación*:

1ª A conceptos —positivos— simétricos corresponden *formas Braille simétricas*; ya sea respecto de un eje vertical (llaves, pertenencia, inclusión, anterioridad, implicación...) o respecto de un eje horizontal (unión/intersección, conjunción/disyunción, valor lógico...).

2ª La relación contraria de otra (su negación) se expresa en Braille anteponiendo el signo formado por los puntos 45, ⠘.

3. NOTACIONES GEOMÉTRICAS

El presente Capítulo tiene, en buena medida, el carácter de mero *inventario* o *catálogo de notaciones*. Se acompañan, no obstante, algunas sugerencias y recomendaciones que facilitan el *trabajo de aula*, o que incluso podrían elevarse a la categoría de *indicaciones para una transcripción simplificada* —útil a editoras y transcriptores profesionales— a condición de advertirlo oportunamente (de lo contrario, las propuestas habría que calificarlas en algunos casos de *errores de transcripción*, aun sin alterar el contenido matemático-conceptual).

En el aula ordinaria, para el trabajo en Geometría, podemos distinguir tres tipos de representaciones planas:

a) grabados;

b) dibujos geométricos propiamente dichos; y

c) expresiones algebraico-geométricas y analíticas.

Los *grabados* y *figuras geométricas* exceden casi por completo las posibilidades de representación mediante la máquina Perkins. Apenas algunos esquemas de trazos exclusivamente ortogonales: itinerarios, planos, ciertas funciones (*en escalera*), etc., que se tratarán en el Capítulo 5.

Las *reglas de transcripción al Braille* relativas a expresiones y transformaciones algebraico-geométricas y analíticas se hallan perfectamente definidas; son completas e inequívocas. Su aplicación no plantea más dificultades que las específicas del Sistema; en particular, la sintaxis derivada de su estricta linealidad.

Por otra parte, los problemas relacionados con la expresión analítica de objetos y situaciones analítico-geométricas en poco o nada se diferencian de las exclusivamente algebraicas: empleo de subíndices, variantes tipográficas, ecuaciones y sistemas, etc. Bastaría con remitir al Capítulo 2.

Así pues, nos limitaremos a enunciar y ejemplificar la representación Braille de las diferentes notaciones algebraico-geométricas, ofreciendo sugerencias concretas que puedan facilitar la tarea al alumno. Como podrá observarse, estas *Sugerencias* o *Criterios* coinciden esencialmente con los recogidos en el Capítulo anterior.

Ahora bien, la mayoría de los conceptos geométricos cuentan con diversas notaciones. Se recogen las más frecuentes y su versión Braille. Relativas a ellas, y a lo largo de prácticamente todo el Capítulo, nos plantearemos dos cuestiones exclusivamente didácticas:

a) Si es posible elegir, ¿cuál de las notaciones es la más adecuada para ser empleada por el alumno en sus trabajos?

b) Salvando los peligros de error o confusión, ¿puede prescindirse de alguno o algunos de los caracteres definidores del *signo específico*?

3.1. **ÁNGULOS**

En los Capítulos precedentes se han considerado la *medida de ángulos y arcos* (Capítulo 1) y las *funciones angulares* (*funciones circulares* e *hiperbólicas*: Capítulo 2). Nos referiremos, pues, tan sólo a las *representaciones algebraico-geométricas* y sus *operaciones*.

Tres son las formas habituales de designar simbólicamente un ángulo:

— Mediante una única letra, representativa de la porción de plano *determinada* o *comprendida* por el ángulo.

— Mediante tres letras (generalmente, mayúsculas) dadas en un cierto orden, y que determinan tanto *las dos semirrectas/lados* que definen el ángulo como su orden o sentido de giro; la *letra central* debe coincidir con su *vértice*.

— Mediante la única letra (mayúscula) que designa su *vértice*; en cuyo caso el ángulo simbolizado (sus *lados* y sentido) debe estar perfectamente determinado por el contexto (enunciado verbal, referencia a situación gráfica, etc.).

En cualquier caso, la única o tres letras estarán cubiertas por el *signo de ángulo*.

Tabla 3-1. Notaciones para representación de ángulos

Tinta		$\widehat{\alpha}$	$\widehat{BAC}$	$\widehat{A}$
Braille	Notación	⠘⠒⠈⠁	⠘⠒⠢⠨⠃⠨⠁⠨⠉⠔	⠘⠒⠨⠁
	Códigos	45,25,..	45,25,26,..,35	45,25,46,1

Obsérvese que la condición lineal del Braille exige acudir al *paréntesis auxiliar* (abrir: ⠢, puntos 26; cerrar: ⠔, puntos 35) para *representar* la relativa bidimensionalidad de la expresión en tinta, cuando ésta sobrepasa un único carácter (lo que podríamos calificar de *relativamente compleja*).

a) La *notación más sencilla*. Como es habitual: *la más breve*, en términos de escritura Braille; es decir: aquéllas en las que basta una única letra para designar el ángulo; mayúscula o minúscula, latina o griega, con o sin marcas.

Ahora bien, el empleo de la notación que designa el ángulo por la letra de su vértice está condicionada por el contexto: pudiera ocurrir que la situación de referencia comprendiera varios ángulos de igual vértice, existiendo entonces el riesgo de confusión. Sin embargo, para confirmar este *riesgo* conviene descender de la situación en su globalidad a los diferentes pasajes de un cálculo o demostración.

Por ejemplo: si en un cierto momento nos estamos refiriendo a los ángulos de un determinado triángulo, bastaría designar cada uno de ellos por su vértice, salvo que intervengan al mismo tiempo *partes* suyas determinadas por bisectrices, alturas, etc., o *ángulos exteriores*. De hecho, ésta es la práctica ordinaria en la comunicación oral.

El recurso a designar el ángulo como *región del plano*, también con una única letra, sería sin duda la forma gráfica más simple; incluso puede mejorarse el ejemplo de la tabla 3-1, empleando *latina minúscula* en lugar de *griega*, tal como se recomendaba en la Sección 2.4. Pero surgen dos inconvenientes:

— Que la notación venga referida a una situación dada o enunciada, en la que aparezcan sólo *puntos*, y no *regiones angulares*. En cuyo caso, incrementar las notaciones supondría incrementar también la dificultad de representación interior y reserva de recursos de memoria.

— Que ya hubiera otros elementos de igual o análoga denominación: lado opuesto, ángulo de vértice la misma letra mayúscula, etc.; con el consiguiente riesgo de confusión en la comunicación oral.

b) Prescindibilidad del *signo de ángulo*. Salvo que existiera algún otro elemento (lado, segmento, triángulo, etc.) designado con la misma nomenclatura, podría prescindirse del *signo de ángulo* (⠘⠒, puntos 45,25).

Tabla 3-2. Ángulos. Variantes simplificadas

Tinta	$\widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{CAB} = 180°$
Expresión *literal*	⠘⠒⠢⠨⠁⠨⠃⠨⠉⠔⠖⠘⠒⠢⠨⠃⠨⠉⠨⠁⠔⠖⠘⠒⠢⠨⠉⠨⠁⠨⠃⠔⠶⠼⠁⠓⠚⠴
Expresión *simplificada*	⠨⠁⠨⠃⠨⠉⠖⠨⠃⠨⠉⠨⠁⠖⠨⠉⠨⠁⠨⠃ ⠶ ⠼⠁⠓⠚⠴
Tinta	$\widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{A} = 180°$
Expresión *literal*	⠘⠒⠨⠃⠖⠘⠒⠨⠉⠖⠘⠒⠨⠁ ⠶ ⠼⠁⠓⠚⠴
Expresión *simplificada*	⠨⠃⠖⠨⠉⠖⠨⠁ ⠶ ⠼⠁⠓⠚⠴
Tinta	$\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} = 180°$
Expresión *literal*	⠘⠒⠈⠁⠖⠘⠒⠈⠃⠖⠘⠒⠈⠛ ⠶ ⠼⠁⠓⠚⠴
Expresión *simplificada*	⠁⠖⠃⠖⠉ ⠶ ⠼⠁⠓⠚⠴

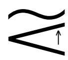
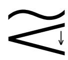
Ésta es también la práctica ordinaria en tinta:

Ejemplos de simplificaciones habituales

en lugar de	
$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$	$\text{Sin}\widehat{a} + b = \sin\widehat{a}\cos\widehat{B} + \sin\widehat{b}\cos\widehat{A}$
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$

Existen otras notaciones singulares, que pueden considerarse como excepcionales y, de todo punto, *ornamentales*.

Tabla 3-3. Ángulos. Notaciones particulares

Concepto	**Notación tinta**	**Braille**	
		Notación	**Códigos**
Ángulo recto		⠸⠤	456,36
Ángulo orientado positivamente		⠨⠱	46,156
Ángulo orientado negativamente		⠨⠜	46,345

3.2. SEGMENTOS Y ARCOS

Por *segmento* entendemos aquí un *elemento lineal*: *"porción de recta o curva determinado por dos puntos"*. A diferencia de *"segmento como elemento de superficie"*, o *"porción de plano comprendida entre una cuerda y su arco"*.

Dos son las formas ordinarias de designar un segmento:

— Mediante una única letra, representativa de la porción de recta o curva.

— Mediante dos letras (generalmente, mayúsculas) dadas en un cierto orden, y que determinan tanto *los dos extremos del arco* como su orden o sentido de recorrido.

En el caso de *segmentos de curva*, puede incluir *una tercera letra en posición central*, en cuyo caso *la primera y última* deben coincidir con *los extremos*. La *letra central* designaría entonces *un punto interior del arco*.

Si el *segmento* o *arco de curva* quedara determinado por un ángulo, cabe una tercera forma:

— Mediante una única letra, representativa de la porción de plano limitante o comprensora del segmento. En particular: mediante la única letra que designa el *"vértice del ángulo que abarca o sustenta dicho arco"*, en su caso; lo que implica que el ángulo simbolizado (sus *lados* y sentido) debe estar perfectamente determinado por el contexto —enunciado verbal, referencia a situación gráfica, etc.—.

En cualquier caso, la única, dos o tres letras deberán estar *cubiertas* por el *signo de segmento*, si se trata de *segmento de recta*, o por el *signo de arco*, si se tratara de una curva (circunferencia, por ejemplo). Se exceptúa el *arco correspondiente al ángulo...* donde el signo se antepone a las letras de definición.

Tabla 3-4. Segmentos y arcos de curva

Concepto	Notación tinta	Braille	
		Notación	Códigos
Segmento rectilíneo	$\overline{\alpha}$	⠈⠉⠈⠁	4,14,.
	$\overline{AB}$	⠈⠉⠢⠨⠁⠨⠃⠔	4,14,26,.,35
Arco o segmento de curva	$\overset{\frown}{\alpha}$	⠈⠒⠈⠁	4,25,.
	$\overset{\frown}{AB}$	⠈⠒⠢⠨⠁⠨⠃⠔	4,25,26,.,35
Arco correspondiente al ángulo $\widehat{A}$	$\smile \widehat{A}$	⠢⠜⠨⠁	26,345,.
Arco correspondiente al ángulo $\widehat{ABC}$	$\smile \widehat{ABC}$	⠢⠜⠨⠁⠨⠃⠨⠉	26,345,.

Para los *segmentos rectilíneos* cabe una cuarta expresión, más propia del Cálculo Analítico que Geométrico, y que puede considerarse paralela a la tercera de las anteriores, por cuanto se refiere a sus extremos. Permite precisar, por otra parte, si se toman en consideración (comprende o no) cada *extremo*:

Tabla 3-5. Intervalos lineales (segmentos de la recta real)

Concepto	Notación tinta	Braille	
		Notación	**Códigos**
Cerrado	[a, b]	⠷⠁⠂ ⠃⠾	12356,.,23456
Abierto	]a, b[	⠾⠁⠂ ⠃⠷	23456,.,12356
Semicerrado por la izq. (Semiab. dcha.)	[a, b[	⠷⠁⠂ ⠃⠷	12356,.,12356
Semicerrado por la dcha. (Semiab. izq.)	]a, b]	⠾⠁⠂ ⠃⠾	23456,.,23456

Tampoco faltan notaciones que combinan *paréntesis curvos* y *corchetes, paréntesis angulares,* etc.

Tienen plena vigencia las observaciones formuladas a propósito de los ángulos:

a) La *notación más sencilla* sería también aquí la que se sirve de una única letra. Se aminora no obstante la diferencia de complejidad con la forma que recurre a los extremos, al constar ahora de tan sólo dos letras, si bien éstas serán, de ordinario, mayúsculas.

b) El *signo de segmento* sería completamente prescindible:

— Si se expresa mediante una única letra, salvo que quieran distinguirse *segmento* y su *medida*, o *ángulo* y su *arco*, etc.

— Si se refiere a un *segmento rectilíneo*, y se expresa mediante sus extremos (dos letras); ya que: dos puntos del plano sólo pertenecen simultáneamente a una única recta (axioma de definición del plano euclídeo). El riesgo de confusión viene ligado a las situaciones en las que coexistan *cuerdas* y *arcos*.

3.3. VECTORES, RECTAS Y SEMIRRECTAS

Con independencia de la expresión analítica, un *vector* puede representarse:

— De forma general, mediante *«una» letra* (de ordinario, minúscula) marcada superiormente con una *flecha*.

— En algunos textos, mediante *una única letra en tipografía resaltada* (negrita, gótica o cursiva).

— Como elemento de un *espacio vectorial afín* (plano o espacio euclídeo, por ejemplo), mediante *las dos letras representativas de los extremos*, cubiertas superiormente por *una flecha*.

Aunque, en este punto, habría que distinguir entre *vector fijo* (al que se refiere estrictamente esta notación) y *vector libre* o *clase de equipolencia de vectores fijos* (ver más abajo). En la práctica, se identifican las notaciones, al considerarse el primero como un *representante de clase* o *singularización* del segundo.

— Como resultado de operaciones con operandos diversos, cubierto por una flecha superior.

Tabla 3-6. Vectores

Concepto	**Notación tinta**	**Braille**	
		Notación	**Códigos**
Vector	$\overrightarrow{a}$	⠒⠂⠁	25,2,1
	a	⠔⠁⠔	35,1,35
Vector opuesto	$\overleftarrow{a}$	⠐⠒⠁	5,25,1
	$\overrightarrow{-a}$	⠤⠒⠂⠁	36,25,2,1
Vector resultado	$\overrightarrow{3a}$	⠒⠂⠢⠼⠉⠐⠁⠔	25,2,26,...,35
	$\overrightarrow{f(t)}$	⠒⠂⠋⠣⠞⠜	25,2,...
Vector fijo	$\overrightarrow{AB}$	⠒⠂⠢⠨⠁⠨⠃⠔	25,2,26,...,35
Vector libre (clase de equipolencia con repres.)	$[\overrightarrow{AB}]$	⠷⠒⠂⠨⠁⠨⠃⠾	12356,25,2,... 23456

a) Es difícil hablar de *notación más sencilla*, ya que *la única* empleada es la primera de las citadas; salvo que se esté distinguiendo entre *vectores libres* y *vectores fijos* o *representantes de clase de equipolencia* en el plano o espacio afín vectorial, en cuyo caso conviene mantener la doble expresión.

b) Como para los demás objetos geométricos, la supresión en Braille del *signo de vector* debe asegurar primero que no induce a error. Ahora bien, conviene determinar de antemano si en el mismo contexto coexistirán conceptos y formas de representación que pudieran ser motivo de confusión:

— *vectores* y sus *contrarios*, representados por la misma *letra-base* con flecha invertida;

— *vectores* y sus *módulos* representados por la misma *letra-base* sin marca de flecha;

— distinción entre *segmento* y *vector* (*segmento orientado*) con mismos extremos.

Tabla 3-7. Otras representaciones de vectores

Concepto	**Notación tinta**	**Braille**	
		Notación	**Códigos**
Vector	$\vec{a}$	⠒⠂⠁	25,2,.
	$\overrightarrow{AB}$	⠒⠂⠢⠨⠁⠨⠃⠔	25,2,26,...,35
Vector contrario	$\overleftarrow{a}$	⠐⠒⠁	5,25,1
	$\overrightarrow{-a}$	⠤⠒⠂⠁	36,25,2,1
	$\overleftarrow{AB}$	⠐⠒⠢⠨⠁⠨⠃⠔	5,25,26,...,35
Módulo	$[\vec{a}]$	⠸ ⠒⠂⠁⠸	456,0,25,2,1,456
	mod. $(\vec{a})$	⠍⠕⠙⠄⠣⠒⠂⠁⠜	25,2,...

Los *signos de operación entre vectores* son válidos tanto para la *forma analítica* (expresión por coordenadas) como para la *forma sintética* que aquí se está considerando.

Tabla 3-8. Operaciones con vectores

Operación		**Notación tinta**	**Braille**	
			Notación	**Códigos**
Suma	Específico	$\dot{+}$	⠈⠖	4,235
	Usual	$+$	⠖	235
Diferencia	Específico	$\dot{-}$	⠈⠤	4,36
	Usual	$-$	⠤	36
Producto escalar o inferior	Usual	$\cdot$	⠄	3
	Infrecuente	$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$	⠐⠅⠒⠂⠁⠂⠒⠂⠃⠨⠂	5,13,...,2,...,46,2
Producto vectorial		$\dot{\times}$	⠈⠦	4,236
		$\wedge$	⠰⠂	56,2
Producto tensorial		$\otimes$	⠪⠖	246,235
Suma directa (variedades)		$\oplus$	⠪⠖	246,235

Las notaciones específicas para *rectas* y *semirrectas* en el plano y en el espacio pueden calificarse de *inusuales*. No obstante, helas aquí:

Tabla 3-9. Rectas y semirrectas

Concepto	Notación tinta	Braille	
		Notación	**Códigos**
Recta	$\overleftrightarrow{r}$	⠐⠒⠂⠗	5,25,2,.
	$\overleftrightarrow{AB}$	⠐⠒⠂⠢⠨⠁⠨⠃⠔	5,25,2,26,.,35
Semirrecta de origen A (comprende el punto B)	$\overrightarrow{\dot{A}B}$	⠒⠂⠢⠨⠁⠨⠃⠔	25,2,26,.,35
Relación de paralelismo (estricto)	$\vert\vert$	⠸⠇	456,123
Paralelismo/coincidencia	#	⠸⠇⠶	456,123,2356
Perpendicularidades (u ortogonalidad)	$\perp$	⠼⠄	3456,3

Al comienzo de esta Sección nos referíamos a la *relación de equipolencia* entre *vectores fijos*. Ésta se define sobre *espacios vectoriales subyacentes a un espacio afín*, como son el plano y el espacio euclídeos. Se sirve de las nociones de *paralelogramo*, que incluye las de *recta* y *paralelismo*:

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overleftrightarrow{AB} \,||\, \overleftrightarrow{CD} \,||\ \text{y}\ \overleftrightarrow{AC} \,||\, \overleftrightarrow{BD}}$$

Es decir: *dos vectores son «equipolentes»* si, y sólo si: *"las rectas que determinan son paralelas, así como las determinadas por ambos orígenes y ambos extremos"*. En otras palabras: *"ellos, junto con los vectores definidos por sus orígenes y sus extremos, configuran un «paralelogramo»"*.

Tabla 3-10. Relación de equipolencia

Representación tinta	**Braille**	
	Notación	**Códigos**
I□	⠐⠢⠄	5,26,3
$\overrightarrow{AB}$ I□ $\overrightarrow{CD}$	⠒⠂⠢⠨⠁⠨⠃⠔⠐⠢⠄⠒⠂⠢⠨⠉⠨⠙⠔	
$\Leftrightarrow$	⠪⠒⠕	
$\overleftrightarrow{AB}$ || $\overleftrightarrow{CD}$	⠐⠒⠂⠢⠨⠁⠨⠃⠔⠸⠇⠐⠒⠂⠢⠨⠉⠨⠙⠔	
&	⠽	
$\overleftrightarrow{AC}$ || $\overleftrightarrow{BD}$	⠐⠒⠂⠢⠨⠁⠨⠉⠔⠸⠇⠐⠒⠂⠢⠨⠃⠨⠙⠔	

Se comprueba con facilidad su condición de *relación de equivalencia* sobre el espacio de definición; la existencia, por tanto, de *clases de equivalencia*, que serán llamadas *clases de equipolencia* o *vectores libres* (ver tabla 3-7).

3.4. FIGURAS GEOMÉTRICAS

La casi exclusiva forma de representar un polígono es mediante un símbolo específico seguido de la enumeración de sus vértices, que se suponen representados por *letras mayúsculas*; el orden de enumeración informa de su *orientación*. A las *circunferencias* y *círculos* les basta con mencionar su *centro*; a lo sumo, también su *radio*, como subíndice.

Tabla 3-11. Figuras geométricas

Figura o concepto	Notación tinta	Braille	
		Notación	**Códigos**
Triángulo general	△ ABC	⠠⠾⠨⠁⠨⠃⠨⠉	6,23456,…
Triángulo rectángulo	◺ EFG	⠸⠦⠨⠑⠨⠋⠨⠛	456,236,...
Cuadrado	□ ABCD	⠸⠽⠨⠁⠨⠃⠨⠉⠨⠙	456,13456,…
Rectángulo	▯ EFGH	⠯⠽⠨⠑⠨⠋⠨⠛⠨⠓	12346,13456
Polígono (general)	ABCDE ⬠	⠯⠕⠨⠁⠨⠃⠨⠉⠨⠙⠨⠑	12346,135
Círculo de centro *c* y radio *r*	OC_r ○	⠪⠕⠨⠉⠌⠗	246, 135,…
Curva (general)	$\overset{\frown}{c}$	⠢⠔⠉	26,35,…
Relación de semejanza	∞	⠰⠢⠆	56,26,23
Equivalencia (de áreas)	∼	⠐⠢⠄	5,26,2
Proyectividad	$\overline{\wedge}$	⠸⠫	456,1246
Perspectividad	$\overline{\overline{\wedge}}$	⠸⠻	456,12456

Obsérvese que en Braille no es preciso recurrir al *paréntesis auxiliar*, ya que los correspondientes *signos en tinta no abarcan la parte literal*; es decir: se trata de una notación puramente *lineal*, sin *bidimensionalidad encubierta* —como sucedía en el caso de *ángulos*, *segmentos* o *vectores*—.

En ocasiones, una figura determinada se designa por *una única letra*, minúscula o mayúscula, sin necesidad de adjuntarle signo alguno. Se recurre a este procedimiento cuando se trabaja simultáneamente sobre varias figuras no entrecruzadas y con un elevado número total de vértices; es el caso de composiciones y descomposiciones.

a) Al ser única, hay que admitir que también será *la más sencilla*.

b) Puede prescindirse sin riesgo alguno del *signo específico*, que tiene un mero carácter ilustrativo u ornamental. Ésta es también la práctica usual en tinta.

REPRESENTACIÓN BRAILLE DE ELEMENTOS GEOMÉTRICOS

Criterios de simplificación y configuración

1°) Si es posible *elegir* o modificar la forma de designar un elemento geométrico —si no viene impuesta o predeterminada por un enunciado o situación—, la *notación más sencilla* será aquélla que comprenda menos caracteres Braille. En concreto:

1°A) Notación específica. La correspondencia *elemento geométrico-signo específico* es unívoca. No cabe, pues, elección. Sí es posible optar entre distintas formas para la *parte literal* (tabla 3-11).

1°B) Versión tipográfica de la *parte literal*. Ver el *criterio de simplificación* 1° de la Sección 2.4, relativo a *órdenes de preferencia tipográfica* y *alfabética*.

1°C) La elección de la *parte literal* debe tener en cuenta que *no existan otros elementos con la misma denominación*:

— absolutamente, si no se adjunta el *signo específico*;

— con plena univocidad; asegurada por el contexto, y siempre que *no intervengan idénticas notaciones en un mismo pasaje de cálculos o demostraciones*.

Lo que exige un cierto conocimiento anticipado del empleo que va a hacerse de la correspondiente notación.

2°) De ordinario, puede prescindirse

A) Del *signo específico*:

— si no existen diferentes elementos geométricos con idéntica *descripción literal*,

— aun existiendo dicha identidad, si puede establecerse *biunivocidad conceptual* en el contexto (v.gr.: vértice-ángulo, segmento-medida, circunferencia-centro, etc.)

B) Del *paréntesis auxiliar*, si la *última letra de su «parte literal»* no coincide con la *familia y tipo* empleado para designar *operandos multiplicativos*, en su caso;

v.gr.: ⠘⠒⠨⠁⠨⠃⠨⠉ por ⠘⠒⠢⠨⠁⠨⠃⠨⠉⠔.c.

Tabla 3-12. Formas simplificadas de representación de elementos geométricos

Concepto o figura	**Forma repres.**	**Notación tinta**	**Braille**	
			Representación	**Códigos**
Ángulo	Única letra	$\widehat{a}$	⠘⠒⠁	45,25,...
Segmento	Única letra	$\overline{a}$	⠈⠉⠁	4,14,...
Arco	Única letra	$\overset{\frown}{a}$	⠈⠒⠁	4,25,...
Vector	Única letra	$\vec{a}$	⠒⠐⠁	25,5,...
Recta	Única letra	$\overleftrightarrow{r}$	⠐⠒⠂⠗	5,25,2,...
Triángulo	Trío de letras	$\underset{\wedge}{\text{ABC}}$	⠨⠁⠨⠃⠨⠉	...

4. TABLAS Y CUADROS

En relación con otros dominios del saber, la Matemática es considerada de modo bien distinto: *reina de las ciencias*, *sirviente de las ciencias*.

La contradicción es aparente.

La Matemática, una vez liberados sus objetos de lo físico y tangible, se desenvuelve en el ámbito de lo abstracto y puramente cuantitativo. Remontado el vuelo a los espacios de lo numérico y simbólico, parece desligarse de las ataduras que retienen a otras ciencias a sus objetos concretos, para volar libre e independiente en busca de leyes generales y anticipar resultados difíciles o inaccesibles a una medición directa.

Se le reconoce así un valor de *instrumento universal*. Apetecido y reclamado por la práctica totalidad de la ciencia moderna. Es frecuente encontrarse con *descripciones de la realidad* en forma de *tablas de valores*, resultados de observaciones, estudios de campo o experimentos. La Matemática, y en particular sus ramas de la Combinatoria y la Estadística, es cada vez más empleada en dominios tan alejados tiempo atrás como pueden ser la Psicología, la Lingüística, el Derecho, la propia Historia; mucho más allá de los tradicionales de las Ciencias Físico-Químicas y Naturales.

La Matemática parece hallarse por encima de casi todas las ciencias, por su actividad en el *segundo grado de abstracción*, que dirían los clásicos. Pero, al mismo tiempo, se encuentra a su servicio, sin el cual perdería buena parte de su razón de ser: no es desdoro *ser instrumento*.

En este afán por *matematizar la realidad*, una de las primeras apelaciones que se hace a la Matemática es a su estructuración del dominio numérico. Los resultados numéricos obtenidos por no importa qué procedimiento y de tampoco importa qué magnitud o fenómeno, puestos en simple contigüidad, permiten al estudioso extraer cuanto menos *observaciones de segundo orden*, e incluso inducir conclusiones que facilitan la comprensión de dicho fenómeno, inferencias causales o proyecciones predictivas.

En este Capítulo se tratarán las *tablas* y *cuadros* de datos numéricos —generalizándolos a otro tipo de valores—, dejando para el siguiente las transformaciones a lenguaje gráfico-geométrico.

4.1. **MODIFICACIONES ACCIDENTALES**

Nuestro útil de trabajo Braille —la máquina Perkins; pero también las impresoras habituales— se encuentran en clara desventaja de espacio disponible respecto de la escritura en tinta:

— Las dimensiones de la página Braille son rígidas: no más de 40-42 caracteres por línea; frente a la longitud prácticamente ilimitada de la que puede disponerse *en tinta*, sin más que procurarse una hoja de papel apropiada, o tomar ésta en formato apaisado. Limitación semejante puede apreciarse para las 30 líneas por página Braille.

— El tamaño del tipo Braille es intocable. Mientras que la escritura *en tinta* permite comprimir y reducir los tipos, ajustando sus dimensiones a las exigencias de la *tabla* o *cuadro* a confeccionar y del formato elegido.

En conclusión: la expresión en Braille de una *tabla* o *cuadro* matemático se halla necesariamente constreñida a unas dimensiones máximas por página, claramente inferiores a los muy amplios y flexibles límites de las posibilidades de la expresión *en tinta*.

Sin embargo, existen aspectos sobre los que sí se puede intervenir, conservando en esencia el sentido primigenio de la composición tabular:

1º **Modificaciones accidentales.** Serían aquéllas que, sin alterar el contenido y posibilidades matemático-operativas, suponen rupturas del paralelismo expresivo *Tinta-Braille*:

— Permutación de *filas* por *columnas*.

— Preferencia por las *direcciones básicas* (respecto del *esquema corporal*).

— Distribución en *módulos de acceso*.

2º **Modificaciones esenciales.** Más exactamente, deberíamos hablar de *modificaciones estructurales*, ya que se conservaría la finalidad didáctica o facilitadora de operaciones perseguida esencialmente por la organización tabular. En realidad, se corresponden en Braille con un *estadio intermedio* de su estructuración o presentación final *en tinta*. Aquí tan sólo se contemplarán:

— Descomposición/reorganización modular.

— Transformación de los datos numéricos.

4.1.1. PERMUTAR *FILAS* POR *COLUMNAS*

Una *distribución numérica* se reduce, en esencia, a una *secuencia de números; individuales, de pares, de ternas...*

La colección no tiene por qué reflejar necesariamente un orden: estaríamos entonces ante un simple *conjunto de elementos*. Por el contrario, en otros casos, el *orden de presentación* sería relevante, mostrando implícita o explícitamente una *relación funcional* (conjunto de *pares ordenados*); en particular, una ordenación de números individuales puede responder a criterios temporales o de otra índole, encubriendo una *variación funcional respecto de una variable-tiempo*.

Un ejemplo sencillo podemos encontrarlo al estudiar las temperaturas máximas alcanzadas en una localidad a lo largo de un cierto mes de 30 días.

De ordinario, la *impresión en tinta* presenta esta secuencia en forma *modular*; ya sea *por semanas*, *decenas* o *quincenas*. Pero tal distribución, que fácilmente se transcribiría a Braille, dificulta un análisis en continuidad de la variación temporal.

Apercibidos del inconveniente, las editoriales (en tinta) —o los autores— tienden a presentar la serie en forma lineal única. Es frecuente, sin embargo, que se haga en *presentación horizontal*, aprovechando al extremo las posibilidades tipográficas y de espacio:

Temperaturas máximas en Villa-Buena: 1-20, abril de 2002 (presentación horizontal)

Día	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Temp. máx.	20	22	18	18	22	24	20	19	18	15	11	12	15	18	23	21	21	22	20	18

La escasa longitud de la línea Braille hace imposible conservar tal distribución *en horizontal*. El problema se agudiza al crecer el número o tamaño de las cantidades.

Al rehusar —por las razones arriba expuestas— el desdoblamiento en dos o más fragmentos, y siempre que sea posible su expresión en un único *bloque vertical*, se propone:

Tabla 4-1. Ejemplo de tabla en disposición vertical

Tinta		**Braille**
Día	Temp.	⠙⠌⠁ ⠞⠑⠍⠏
1	20	⠼⠁ ⠼⠃⠚
2	22	⠼⠃ ⠼⠃⠃
3	18	⠼⠉ ⠼⠁⠓
4	18	⠼⠙ ⠼⠁⠓
5	22	⠼⠑ ⠼⠃⠃
6	24	⠼⠋ ⠼⠃⠙
7	20	⠼⠛ ⠼⠃⠚
8	19	⠼⠓ ⠼⠁⠊
9	18	⠼⠊ ⠼⠁⠓
10	15	⠼⠁⠚ ⠼⠁⠑
11	11	⠼⠁⠁ ⠼⠁⠁
12	12	⠼⠁⠃ ⠼⠁⠃
13	15	⠼⠁⠉ ⠼⠁⠑
14	18	⠼⠁⠙ ⠼⠁⠓
15	23	⠼⠁⠑ ⠼⠃⠉
16	21	⠼⠁⠋ ⠼⠃⠁
17	21	⠼⠁⠛ ⠼⠃⠁
18	22	⠼⠁⠓ ⠼⠃⠃
19	20	⠼⠁⠊ ⠼⠃⠚
20	18	⠼⠃⠚ ⠼⠁⠓

NECESIDAD DE PERMUTAR *FILAS* POR *COLUMNAS*
EN LA REPRESENTACIÓN BRAILLE DE TABLAS Y CUADROS

1º Siempre que sea posible, la sucesión numérica o de elementos se presentará como *bloque único* Si es preciso, se transforma la *configuración horizontal* de la expresión *en tinta* en *configuración vertical*.

2º Cuando las dimensiones de la serie o *tabla* exceda las posibilidades (horizontales o verticales) de la página Braille, la partición se realizará en un número mínimo de *bloques*; procurando, además, que éstos sean de tamaño semejante.

3º Se procurará la máxima contigüidad entre elementos correlativos, reduciendo los *espacios en blanco* de separación; pero manteniendo, al mismo tiempo, un mínimo que facilite la exploración y distinción de éstos; como criterio: *2-3 espacios en blanco*.

4º En caso de fragmentación *por bloques*: mayor separación entre éstos (por *espacios* o *líneas en blanco*) que entre elementos correlativos.

5º Respetar el encolumnado de cantidades (órdenes de unidades). Que facilite una rápida apreciación comparativa o de las variaciones.

A su vez, este último criterio o recomendación hace preferible la estructura *en columna*, más apta para la exploración háptica y comparación de magnitudes que la *horizontal*.

4.1.2. PREFERENCIA POR LOS *EJES BÁSICOS*

Aceptamos como premisa que la exploración háptica cuenta con menores referentes que la visual, siendo mucho más imprecisa en las direcciones a seguir, retorno a los *puntos de partida*, etc.

No obstante, el sistema háptico cuenta con un sistema de referencia privilegiado: *el propio cuerpo*. En particular, y al tratar de la exploración en la página Braille, los elementos geométricos de referencia relacionados con el pecho del lector; es decir:

α) el plano soporte (mesa);

β) el plano de simetría corporal del lector, o *plano antero-posterior*; y

γ) el propio *plano pectoral* del lector.

Asociados a ellos —determinados por ellos— aparecen los correspondientes *ejes coordenados*, no necesariamente perpendiculares entre sí:

α') el *vertical* (eje longitudinal del cuerpo);

β') el *transversal* o *izquierda-derecha* (que mide la desviación respecto del *plano de simetría axial*);

γ') el *eje antero-posterior* (que indica o mide la distancia frontal al pecho del lector).

En el ejercicio de este tipo de tareas, por ende, el *plano soporte* o *plano de la mesa* (supuesto horizontal, sin pérdida de generalidad) permanece invariable, y determina, para todos los elementos a explorar allí depositados, coordenada constante (α) respecto del eje vertical.

Una vez *instalado* el lector ante la *página a explorar*, quedan determinados los otros dos *planos y ejes referentes*, por la posición relativa del pecho del sujeto. Pueden considerarse constantes a lo largo de la exploración.

Así pues, sólo deben considerarse dos variables:

x) *desviación izquierda-derecha*, e

y) *distancia anterior*;

que se corresponden esencialmente con las dos dimensiones de la página Braille:

x’) *izquierda-derecha* (en la dirección de la *línea de lectura*), e

y’) *arriba-abajo* (en la dirección *columna de caracteres*).

La referencia se ha desplazado del *cuerpo del lector* a la misma *página Braille*; del *esquema corporal*, a la *representación a explorar*. Nos hallamos ahora ante un sistema de referencia bidimensional, de ejes cartesianos ortogonales; con una cierta independencia incluso de la postura del lector.

Así pues, la exploración se verá tanto más facilitada cuanto que los elementos de la representación se distribuyan conforme a estas dos *direcciones básicas*. Y será tanto más dificultosa, cuanto que su exploración obligue a seguir *direcciones oblicuas*; direcciones de distribución de los elementos representados (condicionantes de la exploración) que deberán evitarse, en la medida de lo posible.

Un ejemplo sencillo lo tenemos en el llamado *Triángulo de Tartaglia*:

Tabla 4-2. Triángulo de Tartaglia

Presentación ordinaria (en tinta)
1 1 1 2 1 1 3 3 1 1 4 6 4 1 1 5 10 10 5 1 1 6 15 20 15 6 1 1 7 21 35 35 21 7 1 1 8 28 56 70 56 28 8 1
Presentación en Braille (adecuada)


La vista puede seguir sin dificultad las oblicuas correspondientes a un mismo orden, que resultarían muy costosas al sistema háptico. Éste debería, más bien, recurrir a movimientos de zig-zag, localizando término a término; algo que es innecesario cuando se aprovecha la columnación vertical.

Es indiscutible que en nuestra propuesta se pierden aspectos en apariencia didácticamente importantes:

— Simetría axial. Si bien es fácil de comprobar en el modelo visual, la percepción háptica —mucho más limitada en las dimensiones de una primera exploración— precisaría de *comprobaciones locales*, en concreto: *línea a línea*; precisamente esta *"simetría en cada fila"* es, en última instancia, la esencia estructural: igualdad de números combinatorios complementarios.

— Correspondencia aditiva. En Tinta: *"cada número combinatorio es suma de los dos que se hallan sobre él"*; en Braille: *"cada número combinatorio es suma del que se halla sobre él y del que se encuentra a la izquierda de éste"*. La *traducción verbal* se complica; pero la expresión dinámica en la tabla es tan simple en un caso como en otro.

No obstante, puede que aquellos alumnos que padezcan trastornos de lateralidad encuentren aquí un punto de dificultad: confusión izquierda-derecha. Como medio didáctico, basta recordar o reconstruir las tres primeras filas, para rememorar la ley de formación en sus términos exactos.

Por contra:

— La representación rectangular subraya la correspondencia *columna-orden*. Que en la *representación simétrica* sólo se evidencia en el contexto de cada fila.

Las previsiones de *espacios en blanco* en la separación de columnas responden al criterio general: *"por si acaso... más adelante aparecen números de más cifras"*.

EMPLEO PREFERENTE DE LOS *EJES BÁSICOS* DE REFERENCIA EN LA REPRESENTACIÓN BRAILLE DE TABLAS Y CUADROS	
1º	Los elementos deben distribuirse de forma que la ulterior exploración siga, preferentemente, los *ejes coordenados básicos* (*arriba-abajo*, *izquierda-derecha*).
2º	Deben respetarse los *espacios en blanco* precisos para que los elementos queden encolumnados. Lo que facilitará tanto la exploración como la propia confección (basta *"contar, sumando número de cifras o letras y espacios en blanco"*).
3º	Deben respetarse los *espacios y líneas en blanco* convenientes para que los elementos, columnas y líneas queden suficientemente aislados; pero conservando la contigüidad también suficiente para que puedan establecerse las oportunas relaciones estructurales.

4.1.3. PARTICIÓN EN *MÓDULOS DE ACCESO* [1]

Ciertas *tablas* constan de un número elevado de términos. Sin necesidad de acudir a las tradicionales *Tablas Trigonométricas* o *de logaritmos*, baste considerar los datos resultado de observaciones o encuestas elementales, obtenidos por un grupo de trabajo o equipo de alumnos:

"Pedir a 100 personas que calculen por aproximación la longitud de un cabo de cuerda."

Previa a su manipulación, esta información *en bruto*, daría lugar a un *listado* o *tabla* de valores numéricos en desorden:

65	66	68	68	69	69	70	70	70	71
71	71	72	72	73	73	73	73	74	74
75	75	75	75	75	76	76	76	77	77
77	77	77	78	78	78	78	79	79	79
79	79	80	80	80	80	80	80	80	81
81	81	81	81	81	82	82	82	83	83
83	83	83	84	84	84	84	85	85	85
85	85	86	86	86	86	87	87	87	87
88	88	88	89	89	89	90	90	90	90
91	91	91	92	92	93	93	94	95	95

Un oportuno *tratamiento de la información* podría desembocar en:

a) ordenación creciente de los valores recogidos;

b) determinación de la *frecuencia* con que aparece cada valor.

En cualquier caso, será preciso releer la colección una y otra vez.

Si los datos se han escrito en *forma compacta*, sin estructura alguna, no será difícil que *"se pierda la cuenta de por dónde íbamos"*; o que exista el riesgo de *leer dos veces la misma línea de datos*; o...

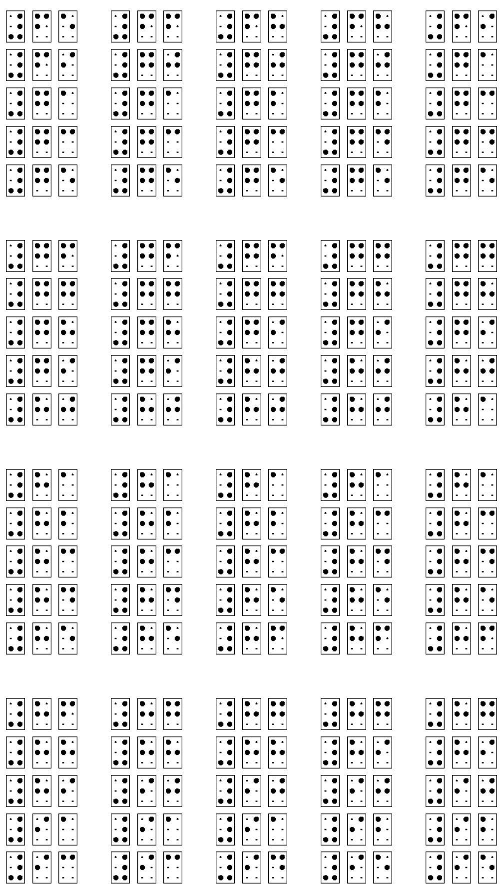
La escritura en tinta permite recurrir a *punteos* o *subrayados*, imposibles en Braille. También a una *distribución en cajas*, asimismo impensable en nuestro caso;

[1] La denominación "módulos de acceso" hace referencia a la "accesibilidad o facilidad exploratoria háptica". Se corresponde, en su aspecto formal, con el de "cajas", empleado para las "matrices". Se ha evitado este término —ya existente en la nomenclatura matemática— al perseguirse tan sólo "una descomposición de un conjunto de valores en subconjuntos estructurados espacialmente", sin otra finalidad que facilitar la mencionada exploración/lectura ulterior.

pero esta segunda fórmula sugiere una solución viable: la que hemos dado en llamar *distribución en módulos de acceso*. Una muy simple organización espacial, que facilita la tarea:

Tabla 4-3. Ejemplo de estructuración espacial en braille mediante módulos de acceso

65	66	68	68	69	69	70	70	70	71
71	71	72	72	73	73	73	73	74	74
75	75	75	75	75	76	76	76	77	77
77	77	77	78	78	78	78	79	79	79
79	79	80	80	80	80	80	80	80	81
81	81	81	81	81	82	82	82	83	83
83	83	83	84	84	84	84	85	85	85
85	85	86	86	86	86	87	87	87	87
88	88	88	89	89	89	90	90	90	90
91	91	91	92	92	93	93	94	95	95



Obsérvese que, aun siendo posibles las *cajas* o *módulos* de 2X10, 3X10, 5X10 elementos, se ha preferido reducir su longitud a *5 columnas*, por considerar que *diez elementos por fila; resultarían excesivos —más propicio a la confusión— para la exploración háptica. Quizás también para la inspección visual: de aquí —y por la sencillez del trazado de líneas— la reducción a 5 columnas*.

PARTICIPACIÓN EN *MÓDULOS DE ACCESO* DE LA REPRESENTACIÓN BRAILLE DE UNA *TABLA* CON ELEVADO NÚMERO DE ELEMENTOS	
1º	Cuando el total de elementos de una *tabla* es elevado (más de *5 filas* o *5 columnas*, como criterio general), es preferible introducir una *división formal* en *módulos de acceso*, mediante el empleo de *líneas en blanco* y/o *columnas vacías*.
2º	Siempre que sea posible, los *módulos* resultantes deberán tener las mismas dimensiones. Si no en ambas, al menos en una de ellas; con preferencia, el número de *columnas*.
3º	La disposición espacial de los *módulos* entre sí deberá acomodarse, en lo posible, a criterios claros de estructuración.
4º	En caso de que el conjunto resultante deba ocupar varias páginas y que la *tabla* o *cuadro* cuente con *cabeceras de línea* o de columna, éstas deberán reiterarse en cada página.
5º	Si el conjunto total ocupara dos páginas, puede intentarse reproducir la estructura global original en formato de *doble página* o *desplegable*. Puede soslayarse entonces la reiteración de *cabeceras de fila*, si está asegurada la continuidad en el seguimiento de cada línea.

4.2. **MODIFICACIONES ESENCIALES EN LA ESTRUCTURA**

Una *tabla* o *cuadro* puede tener finalidades varias, en Matemáticas o en cualquier otro dominio:

— economía de espacio;

— economía de tiempo/esfuerzo en la localización de un valor;

— facilitar el reconocimiento/descubrimiento de leyes estructurales internas;

— facilitar su posible memorización.

En el aula, resaltará un orden de preferencia, según la situación u objeto de la tarea. Así, por ejemplo, no tienen por qué coincidir en su estructura y formato un *cuadro de horarios* o una *chuleta-resumen*: en ambos casos, al pretender llevarlos consigo continuamente, deberán tener un formato reducido; pero mientras el primero exige una facilidad para la consulta inmediata, la segunda debe contar con una estructura que favorezca el aprendizaje y ponga de manifiesto *reglas* o *leyes*. Poco tienen que ver un *triángulo de Tartaglia*, al que se hacía referencia más arriba, a construir por los alumnos o proporcionado para descubrir sus *leyes de formación*, con una *chuleta* que les permita disponer inmediatamente de los coeficientes en el desarrollo de la potencia de un binomio; aunque coincidan en su *contenido material*.

Al tratarse del trabajo en Braille, además, habrá que contar con las consabidas limitaciones: el tamaño único de los caracteres, las dimensiones máximas de la página y las características de la exploración háptica.

En la Sección anterior hemos analizado algunas diferencias entre las versiones Tinta y Braille de una misma *tabla*, que suponen simples *deformaciones* de su geometría. En ésta, contemplaremos algunos cambios que implican verdaderas transformaciones conceptuales, aunque conservando su contenido matemático y su finalidad didáctica.

4.2.1. LAS *TABLAS* DE LAS OPERACIONES ARITMÉTICAS

Tomemos como modelo la *tabla de multiplicar en base 10*.

Tabla de multiplicar (en base 10)

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Su transcripción al Braille tropieza con inconvenientes no pequeños:

a) La longitud de la línea; ya que precisaría de no menos de 44 espacios (en la línea del 10).

No obstante, podría soslayarse:

— Procediendo a la transcripción fiel o permutando *filas* por *columnas; lo que exigiría un formato en doble página Braille*, excesivo para la destreza exploratoria háptica de alumnos en los niveles elementales de enseñanza.

— Suprimiendo los productos por 1, e incluso por 10. Supondría una modificación reductiva, que rompería la correspondencia Tinta-Braille.

— Suprimiendo los *signos de número*. Análogamente a como se propone para los algoritmos tradicionales (Sección 1.2) y como fórmula general de simplificación (véase más adelante: Apartado 4.3.2).

Sin embargo, tales soluciones deberían hacer frente a una limitación en principio insalvable:

b) La localización de lugares en el interior de la *tabla* exige una destreza exploratoria háptica muy desarrollada, incluyendo independencia y coordinación bimanual (seguimiento de *filas* y *columnas*); que no parece estar al alcance de alumnos de los niveles elementales de enseñanza, a los que correspondería este aprendizaje.

Como tantas veces, la respuesta quizás se halle reflexionando en el proceso de formación de la *tabla*.

La *tabla de multiplicar* ordinaria no surge inmediatamente: es la forma final —cristalizada— de una serie de transformaciones expresivas. Un tosco itinerario didáctico, podría describirse en las siguientes fases:

1ª) En un primer momento, con ayuda de algún material o de *cálculo pensado*, se obtienen ciertos productos, que se expresan formalmente por escrito:

$$2 \times 3 = 6 \quad 2 \times 5 = 10 \quad 2 \times 2 = 4...$$

2ª) El intento de organizar —ordenar— estos resultados puntuales invita a completar la serie —cada serie—:

$$2 \times 1 = 2 \quad 2 \times 2 = 4 \quad 2 \times 3 = 6...$$

3ª) La colección completa de todas las expresiones —igualdades— para productos entre factores de una cifra distinta de 0, da lugar a una primera *tabla*:

Tabla de productos elementales

$2\times2=4$	$2\times3=6$	$2\times4=8$	$2\times5=10$	$2\times6=12$	$2\times7=14$	$2\times8=16$	$2\times9=18$	$2\times10=20$
$3\times2=6$	$3\times3=9$	$3\times4=12$	$3\times5=15$	$3\times6=18$	$3\times7=21$	$3\times8=24$	$3\times9=27$	$3\times10=30$
$4\times2=8$	$4\times3=12$	$4\times4=16$	$4\times5=20$	$4\times6=24$	$4\times7=28$	$4\times8=32$	$4\times9=36$	$4\times10=40$
$5\times2=10$	$5\times3=15$	$5\times4=20$	$5\times5=25$	$5\times6=30$	$5\times7=35$	$5\times8=40$	$5\times9=45$	$5\times10=50$
$6\times2=12$	$6\times3=18$	$6\times4=24$	$6\times5=30$	$6\times6=36$	$6\times7=42$	$6\times8=48$	$6\times9=54$	$6\times10=60$
$7\times2=14$	$7\times3=21$	$7\times4=28$	$7\times5=35$	$7\times6=42$	$7\times7=49$	$7\times8=56$	$7\times9=63$	$7\times10=70$
$8\times2=16$	$8\times3=24$	$8\times4=32$	$8\times5=40$	$8\times6=48$	$8\times7=56$	$8\times8=64$	$8\times9=72$	$8\times10=80$
$9\times2=18$	$9\times3=27$	$9\times4=36$	$9\times5=45$	$9\times6=54$	$9\times7=63$	$9\times8=72$	$9\times9=81$	$9\times10=90$
$10\times2=20$	$10\times3=30$	$10\times4=40$	$10\times5=50$	$10\times6=60$	$10\times7=70$	$10\times8=80$	$10\times9=90$	$10\times10=100$

4ª) El hecho de que en cada *fila* se repita el primer factor, sugiere la posibilidad de retirarlo, haciéndole aparecer *"de una vez por todas"* como *cabecera de fila*:

Tabla semi-simplificada de productos elementales

2	× 2 = 4	× 3 = 6	× 4 = 8	× 5 = 10	× 6 = 12	× 7 = 14	× 8 = 16	× 9 = 18	× 10 = 20
3	× 2 = 6	× 3 = 9	× 4 = 12	× 5 = 15	× 6 = 18	× 7 = 21	× 8 = 24	× 9 = 27	× 10 = 30
4	× 2 = 8	× 3 = 12	× 4 = 16	× 5 = 20	× 6 = 24	× 7 = 28	× 8 = 32	× 9 = 36	× 10 = 40
5	× 2 = 10	× 3 = 15	× 4 = 20	× 5 = 25	× 6 = 30	× 7 = 35	× 8 = 40	× 9 = 45	× 10 = 50
6	× 2 = 12	× 3 = 18	× 4 = 24	× 5 = 30	× 6 = 36	× 7 = 42	× 8 = 48	× 9 = 54	× 10 = 60
7	× 2 = 14	× 3 = 21	× 4 = 28	× 5 = 35	× 6 = 42	× 7 = 49	× 8 = 56	× 9 = 63	× 10 = 70
8	× 2 = 16	× 3 = 24	× 4 = 32	× 5 = 40	× 6 = 48	× 7 = 56	× 8 = 64	× 9 = 72	× 10 = 80
9	× 2 = 18	× 3 = 27	× 4 = 36	× 5 = 45	× 6 = 54	× 7 = 63	× 8 = 72	× 9 = 81	× 10 = 90
10	× 2 = 20	× 3 = 30	× 4 = 40	× 5 = 50	× 6 = 60	× 7 = 70	× 8 = 80	× 9 = 90	× 10 = 100

El *signo de multiplicar* podía haber corrido igual suerte.

5ª) Se procede en forma análoga respecto de los *segundos factores*, que pasan a convertirse en *cabecera de columna*:

Tabla quasi-simplificada de productos elementales

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	= 4	= 6	= 8	= 10	= 12	= 14	= 16	= 18	= 20
3	= 6	= 9	= 12	= 15	= 18	= 21	= 24	= 27	= 30
4	= 8	= 12	= 16	= 20	= 24	= 28	= 32	= 36	= 40
5	= 10	= 15	= 20	= 25	= 30	= 35	= 40	= 45	= 50
6	= 12	= 18	= 24	= 30	= 36	= 42	= 48	= 54	= 60
7	= 14	= 21	= 28	= 35	= 42	= 49	= 56	= 63	= 70
8	= 16	= 24	= 24	= 40	= 48	= 56	= 64	= 72	= 80
9	= 18	= 27	= 36	= 45	= 54	= 63	= 72	= 81	= 90
10	= 20	= 30	= 40	= 50	= 60	= 70	= 80	= 90	= 100

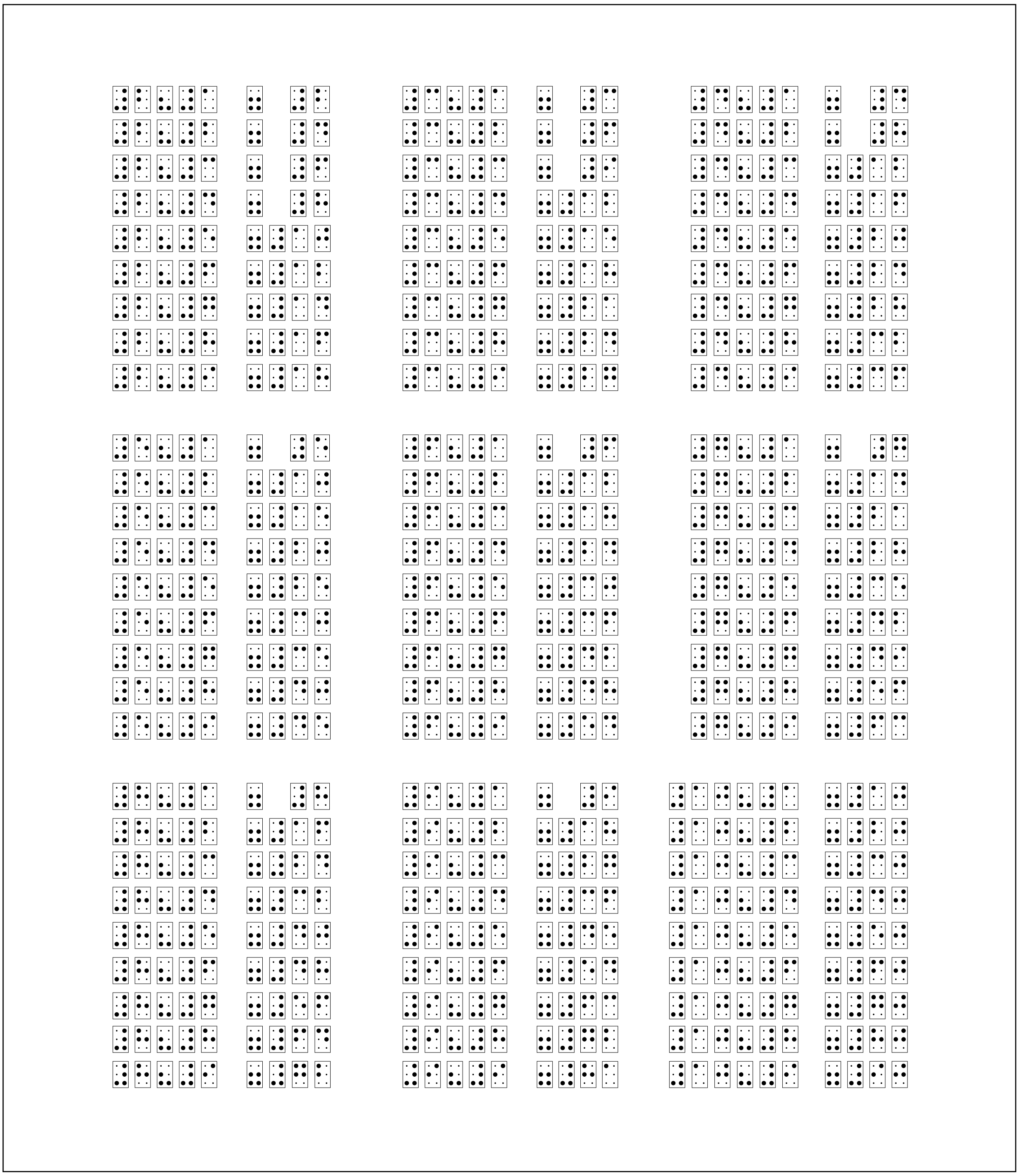
6ª) Los *signos de igualdad* son ahora superfluos, ya que todos los valores *del interior* son *resultado* del producto de la *cabecera de fila* por la *cabecera de columna* correspondientes. Asimismo, se simplifica el *signo de multiplicar* en la *columna de cabeceras de fila*:

Tabla simplificada de productos elementales (o versión reducida de la tabla de multiplicar)

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	24	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

La *tabla de multiplicar* estaría ya completada al concluir la 3ª fase; las tres últimas tienen por objeto exclusivo desembocar en la forma sintética ordinaria, que rehusamos *a priori* por la dificultad en la localización háptica de resultados. Así pues, nuestro objetivo será *reorganizar* la *forma expandida*, haciendo posible su transcripción Braille en los límites de una única página. Se propone:

Tabla 4-4. Tabla de multiplicar (un formato adecuado en Braille)



$2 \times 1 = 2$	$3 \times 1 = 3$	$4 \times 1 = 4$
$2 \times 2 = 4$	$3 \times 2 = 6$	$4 \times 2 = 8$
$2 \times 3 = 6$	$3 \times 3 = 9$	$4 \times 3 = 12$
$2 \times 4 = 8$	$3 \times 4 = 12$	$4 \times 4 = 16$
$2 \times 5 = 10$	$3 \times 5 = 15$	$4 \times 5 = 20$
$2 \times 6 = 12$	$3 \times 6 = 18$	$4 \times 6 = 24$
$2 \times 7 = 14$	$3 \times 7 = 21$	$4 \times 7 = 28$
$2 \times 8 = 16$	$3 \times 8 = 24$	$4 \times 8 = 32$
$2 \times 9 = 18$	$3 \times 9 = 27$	$4 \times 9 = 36$
$5 \times 1 = 5$	$6 \times 1 = 6$	$7 \times 1 = 7$
$5 \times 2 = 10$	$6 \times 2 = 12$	$7 \times 2 = 14$
$5 \times 3 = 15$	$6 \times 3 = 18$	$7 \times 3 = 21$
$5 \times 4 = 20$	$6 \times 4 = 24$	$7 \times 4 = 28$
$5 \times 5 = 25$	$6 \times 5 = 30$	$7 \times 5 = 35$
$5 \times 6 = 30$	$6 \times 6 = 36$	$7 \times 6 = 42$
$5 \times 7 = 35$	$6 \times 7 = 42$	$7 \times 7 = 49$
$5 \times 8 = 40$	$6 \times 8 = 48$	$7 \times 8 = 56$
$5 \times 9 = 45$	$6 \times 9 = 54$	$7 \times 9 = 63$
$8 \times 1 = 8$	$9 \times 1 = 9$	$10 \times 1 = 10$
$8 \times 2 = 16$	$9 \times 2 = 18$	$10 \times 2 = 20$
$8 \times 3 = 24$	$9 \times 3 = 27$	$10 \times 3 = 30$
$8 \times 4 = 32$	$9 \times 4 = 36$	$10 \times 4 = 40$
$8 \times 5 = 40$	$9 \times 5 = 45$	$10 \times 5 = 50$
$8 \times 6 = 48$	$9 \times 6 = 54$	$10 \times 6 = 60$
$8 \times 7 = 56$	$9 \times 7 = 63$	$10 \times 7 = 70$
$8 \times 8 = 64$	$9 \times 8 = 72$	$10 \times 8 = 80$
$8 \times 9 = 72$	$9 \times 9 = 81$	$10 \times 9 = 90$

Se han tomado factores del 2 al 10, como podía haberse hecho del 1 al 9 o del 2 al 9, según criterio didáctico.

VERSIÓN BRAILLE DE *TABLAS OPERATORIAS*	
1º)	La *tabla* se configura en *módulos* de igual *primer factor*, de fácil memorización global.
2º)	Los *módulos* se hallan separados entre sí por una *línea en blanco* y por *columnas de dos espacios en blanco*. Que facilitan su rápida localización unimanual.
3º)	El *signo igual* se halla flanqueado por sendos *espacios en blanco* —excepto en los productos cuyo segundo factor es 10—; en coherencia con lo sugerido en Capítulos anteriores, y, sobre todo, como facilitador de la localización de resultados.
4º)	Se respeta la columnación para los *signos de número*; que facilitará su empleo también como *tabla de dividir*.
5º)	(Opcional). Puede procederse a su transformación en *tabla de bolsillo*, como *desplegable*. Basta separar las *tres filas de módulos* y unirlas después *en línea*; mediante el plegado ulterior *en acordeón*, a explorar por una o las dos caras. La superficie total queda reducida a la de *un único módulo*.
6º)	(Opcional). En este último caso, cada *módulo* puede dividirse en dos o tres porciones mediante la oportuna *línea en blanco*; lo que facilitaría la localización de un determinado producto en el *módulo*. Algo que no podría llevarse a cabo en formato de página completa, ya que exigiría doble separación entre *módulos*, elevando el total a 34 líneas.

4.2.2. EMPLEAR *DATOS TRANSFORMADOS*

Es, de suyo, una práctica muy frecuente cuando se trata de presentar datos o valores cuantitativamente semejantes, pero cuya representación individual consta de un elevado número de cifras.

En ocasiones, se toma como unidad un múltiplo o submúltiplo de la unidad natural o canónica. Así, por ejemplo, si se recogen en una *tabla* los datos de población de países, suele hacerse en *millones de habitantes*; con lo que las cantidades que figuren no sobrepasen el millar. O, tratándose de tamaños medios de animales, se expresa en milímetros o centímetros para que los valores resulten enteros. Etc.

Otras, se toman diferencias respecto de un cierto valor, incluido o no en la *tabla*. Como cuando se trata de presentar la diferencia en términos absolutos de las *rentas per cápita* de los países de la Unión Europea respecto de la *media del conjunto*, sin importar poco ni mucho cuánto es esta *media*. Las variaciones en la producción o ventas de una empresa, tomando como referencia los resultados del mes de enero. Etc.

En el primer caso podríamos hablar de una *transformación homotética*, con una *razón* o *factor de semejanza*. En el segundo, de una *traslación*, con un *vector de traslación* o *valor de referencia*. En ambos, de una *transformación lineal*.

Como se viene reiterando a lo largo de estas páginas, dos son las razones que pueden aconsejar acudir a este tipo de transformaciones a la hora de presentar una *tabla de valores Braille*, aunque no figure así en su versión *en tinta*:

— la limitación de la línea Braille a 40 caracteres; y

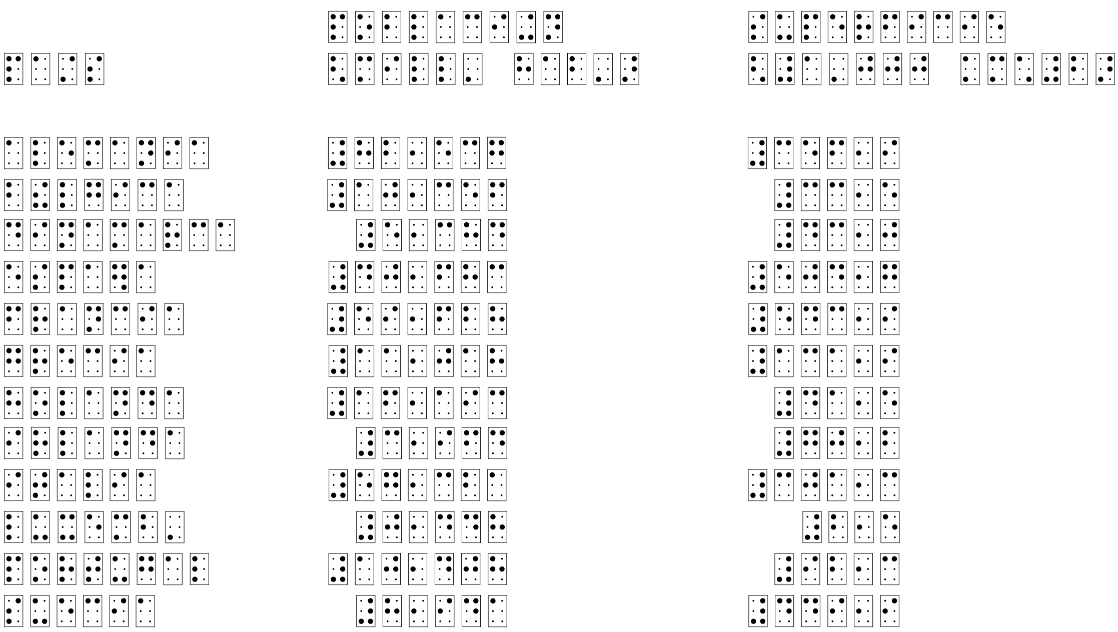
— la mayor lentitud y dificultad de reconocimiento del tacto, a emplear en la lectura Braille, que afecta a diversos *niveles perceptivos*.

Las *pequeñas expresiones Braille* (inferiores a 4 caracteres), literales o numéricas, pueden ser percibidas más fácilmente —de forma global— que las *grandes*. Sin apenas desplazamiento digital, es susceptible de captarse su expresión completa —forma globalizada inmediata—, mientras que aquellas expresiones que exigen un *barrido* implican una construcción/reconstrucción previa a su comprensión definitiva.

Para las expresiones numéricas fijamos el límite en 4 caracteres, ya que el primero de ellos —el *signo de número*—, al darse por *supuesto*, se obvia en la consideración, e incluso se elude su *percepción consciente*. Conviene no olvidar que la coma de las expresiones decimales debe estimarse como un carácter más, ya que ocupa su espacio completo.

Tabla 4-5. Países de la UE. Datos de Geografía Humana (diciembre, 2002)

País	**Población — Habitantes**	**Superficie — Km²**
Alemania	82.537.417	356.910
Bélgica	10.356.325	33.528
Dinamarca	5.384.424	43.069
España	40.683.324	504.782
Francia	59.629.816	543.965
Grecia	11.018.327	131.990
Holanda	16.193.124	41.526
Irlanda	3.964.117	70.280
Italia	57.321.562	301.302
Luxemburgo	448.625	2.586
Portugal	10.408.213	92.390
Suecia	8.941.422	449.96



APLICACIÓN DE LA TÉCNICA DE *DATOS TRANSFORMADOS* EN LA REPRESENTACIÓN BRAILLE DE *TABLAS* CON VALORES NUMÉRICAMENTE COMPLEJOS Criterios de simplificación y configuración
1º) Los datos numéricos se transforman, de forma que los términos del *cuadro* o *tabla* no excedan —si es posible— los 4 caracteres —coma incluida—. 2º) Se omite la unidad que debiera acompañar a cada valor en el interior del *cuadro*; en aras de una mayor simplicidad, y para facilitar la exploración. 3º) La descripción de las unidades empleadas en cada concepto, o la transformación a que se han sometido debe anteponerse a la presentación del *cuadro* o adjuntarse (en línea inferior) a la correspondiente *cabecera*. 4º) Se respeta cuidadosamente la columnación de órdenes de unidades. 5º) Deben respetarse los *espacios y líneas en blanco* convenientes para que los elementos, columnas y líneas queden suficientemente aislados, favoreciendo la aparición de *módulos de acceso* y la exploración háptica, pero conservando la contigüidad también suficiente para que puedan establecerse las oportunas relaciones estructurales.

4.3. **CONVENIOS DE SIMPLIFICACIÓN**

A lo largo del presente Capítulo —y aun de los anteriores— se ha hecho referencia a ciertos criterios locales de simplificación en la presentación Braille de un *cuadro* o *tabla*. Se refieren a la supresión o alteración de elementos gráficos, que en algunos casos pueden considerarse como *esenciales*, pero que pierden este carácter por fuerza del contexto. En cualquier caso, se rompe la estricta correspondencia *Tinta-Braille*, en busca de mejores condiciones para la exploración háptica y mayores posibilidades y facilidades de ejecución con la máquina Perkins.

4.3.1. SUPRESIÓN DE LÍNEAS

De ordinario, las líneas juegan en un *cuadro* en Tinta finalidades varias:

a) Facilitar el reconocimiento visual de qué términos del *cuadro* se hallan *relacionados o separados entre sí*; es decir: un doble valor:

— *unificador y/o separador conceptual*, que, a su vez, determina un cierto

— *facilitador de la exploración visual*; ya que favorece la exploración y localización mediante el seguimiento de dichas líneas.

Tenemos un ejemplo claro en la *tabla de multiplicar* (Apartado 4.2.1). Las "líneas horizontales" de la malla permiten seguir sin dificultad ni riesgo de desviación la serie de *múltiplos del primer factor*; igual función desempeñan las *líneas verticales*, separando *múltiplos del segundo factor*. Unas y otras indican *familias de múltiplos*.

La *caja del divisor* en la división euclídea (ver Sección 1.2.1) tiene un valor claramente *separador*, aunque también facilite la estructuración de términos al realizar la operación.

En ciertas *tablas complejas*, como puede ser algún modelo de la *Tabla Periódica de Elementos Químicos* que adjunte distintos valores a cada elemento, el *valor de unificación* es evidente: se trata de información relativa a un mismo elemento.

Para la versión Braille se ha seguido un criterio único: la función que en Tinta desempeñan tales *líneas* se transfiere a *líneas o columnas en blanco*. Motivos:

— En la lectura, se reduce la estimulación táctil; mucho más saturable que la visual.

— En la realización, se economiza el esfuerzo y tiempo suplementarios requeridos por el trazado de tales líneas de puntos, que para las *verticales* es muy elevado.

— No hay pérdida de información ni alteración estructural.

b) Valor simbólico, o con significación conceptual bien determinada.

En este Apartado y Capítulo nos referimos, evidentemente, a *líneas no estructurantes*; a lo sumo, *líneas unificadoras* o *de separación*. Ya que las que definieran propiamente la estructura de un *cuadro*, estableciendo relaciones individuales entre sus términos —tornándolo *diagrama* o *esquema*—, serán tratadas en el Capítulo 5.

Un ejemplo típico de estas *líneas con valor conceptual no definidoras de estructura interna* serían las *matrices* y *determinantes*.

Una *matriz* es una colección de términos —números, variables, expresiones numéricas o algebraicas— ordenada rectangularmente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Los paréntesis, además de la función *delimitadora* o *unificadora*, tienen un *valor sustantivo*. Si en lugar de *paréntesis* aparecieran *barras* —en el caso de *matrices cuadradas*, exclusivamente—:

$$\mathrm{DET}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix} = 27$$

se trataría ahora de su *determinante*: un valor numérico —resp.: algebraico—, función de los términos de la correspondiente *matriz* (en nuestro caso).

En Braille, no es difícil recoger esta diferencia:

Tabla 4-6. Matrices

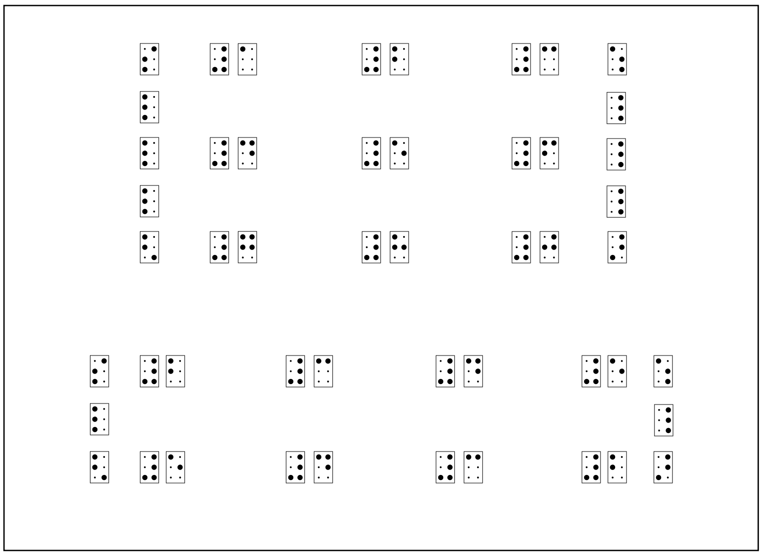
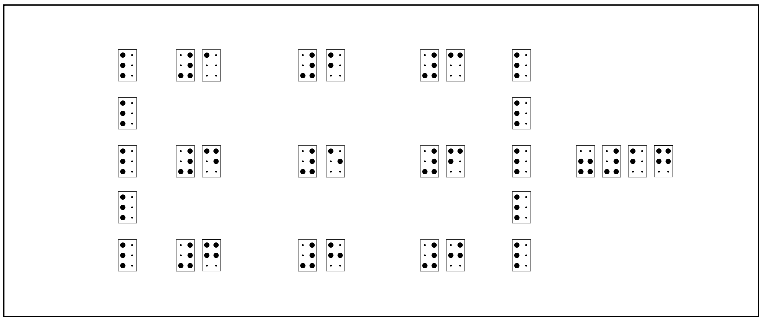


Tabla 4-7. Determinante



La Máquina Perkins también permite el trazado de *líneas verticales continuas* (de puntos), aunque imperfectas: mediante el *paso de línea manual*, deteniendo el giro del *rodillo* de sujeción del papel entre dos líneas. Pero esta manipulación requiere una notable destreza en el manejo del instrumento.

Obsérvese que se respeta una *línea en blanco* como separación entre líneas de la matriz, sin corresponderse con línea alguna *en tinta*. Puede entenderse como *separación en módulos de acceso; que facilite la exploración y cálculos ulteriores.*

Una vez más, habría que distinguir entre representación confeccionada ofrecida al alumno, y **representación a confeccionar por el alumno** en el contexto de una clase o tarea.

En los niveles de enseñanza en los que aparecen *matrices* y *determinantes* —Secundaria y Bachillerato— se supone en el alumno destreza bastante para incluir *paréntesis* o *barras*, discontinuas o continuas. Sin embargo, esto supone —no es exageración— duplicar el tiempo de realización, amén de los enojosos errores por imprecisión en la verticalidad de los trazos. Tiempo y esfuerzo dispensables por el contexto.

La supresión de *paréntesis* y *barras* —su sustitución por *líneas* y *columnas en blanco*— no es, en general, causa de equívocos que no queden resueltos por el contexto. Tan sólo algunas expresiones complejas, como sería el caso de: *"determinante de un producto de matrices igual al producto de sus determinantes"*. Se recomienda en estos casos adjuntar nomenclatura a los términos de la expresión (matrices), y añadir la correspondiente expresión sintética; tal como se recomendaba opcionalmente para las operaciones aritméticas (Sección 1.2) y algebraicas (Sección 2.5):

Tabla 4-8. Determinantes y producto de matrices

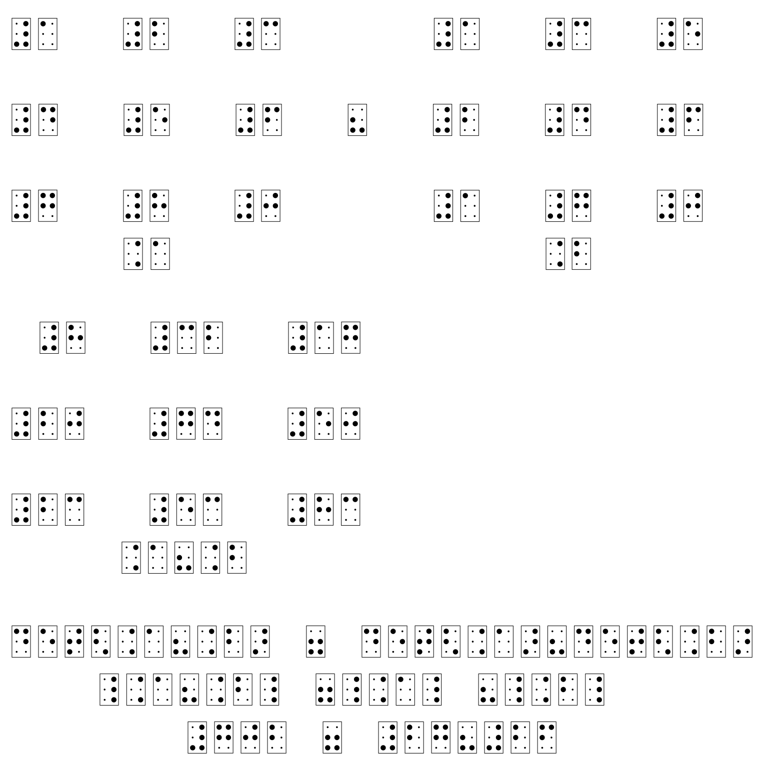
$$\left|\overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 0 \end{bmatrix}} \times \overset{B}{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 7 & 0 \end{bmatrix}}\right| = \left|\overset{A \times B}{\begin{bmatrix} 8 & 32 & 17 \\ 20 & 74 & 50 \\ 23 & 53 & 83 \end{bmatrix}}\right| =$$

$$\left|\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 0 \end{bmatrix}\right| \cdot \left|\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 7 & 0 \end{bmatrix}\right|$$

$$\det(A \times B) = \det(A)\det(B)$$

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

$$702 = 27 \times 26$$



SUPRESIÓN DE LÍNEAS EN LA REPRESENTACIÓN BRAILLE DE *TABLAS* Y *CUADROS*   Criterios de simplificación y configuración
1°) Se prescinde de las *líneas de separación y unificación en tinta*, bastando en Braille con *una línea o doble columna en blanco*.
2°) Si las dimensiones lo hacen aconsejable (más de 3 × 3 elementos), se intercalan *líneas en blanco* para separar *filas del cuadro*; a fin de facilitar la ulterior exploración y cálculos —en su caso—.
3°) De hacerse uso de tales *líneas en blanco intercaladas*, el *cuadro* o *tabla* deberá ir precedido y seguido de *dos líneas en blanco* en lugar de una sola.
4°) Cuando las *líneas* tengan significado propio —matrices, *determinantes*— y se trate de expresiones complejas —en las que intervienen varios *cuadros* o *tablas* singulares—, conviene denominar éstos mediante alguna notación simbólica y adjuntar al conjunto la correspondiente expresión sintética.

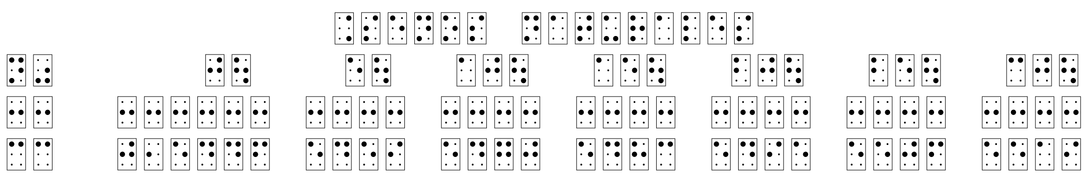
4.3.2. SUPRESIÓN DE SIGNOS

En diversos lugares se ha hecho referencia a la supresión del *signo de número* (Sección 1.2) o de otros, ya fueran exclusivos del Braille (Capítulo 1) o por razones de sencillez y justificación del contexto (Capítulo 2).

Es conocida la solución tradicional de suprimir el *signo de número* en las *tablas de logaritmos y trigonométricas* que desde hace más de medio siglo se han venido editando por las imprentas de la ONCE; o de suprimir también el signo indicador de *grados* para el ángulo *cabecera de línea* en las segundas. Todo ello, a fin de apurar al máximo el espacio disponible por línea. El contexto, cual información o aclaración adicional, evita de inmediato cualquier posible equívoco.

Tabla 4-9. Tablas trigonométricas: senos para ángulos de 33, 0´—30´´

SENOS NATURALES							
n°	0´	5´	10´	15´	20´	25´	30´
33°	0,5446	5459	5470	5483	5495	5506	5519



No dudamos que, al igual que el *signo de número*, también el *prefijo de mayúscula* es proclive a tal supresión, aunque ignoramos si se ha hecho empleo editorial como *convenio local*.

Asimismo, en caso de precisarse *numeraciones de orden* o *nomenclaturas ordinales*, quizás la propia ordenación espacial pueda suplir aquéllas; con la consiguiente economía de caracteres.

Consideremos un ejemplo en el que intentar la aplicación acumulada de estos *convenios locales* o *aprovechamiento extremo del contexto*, como es la *Tabla de Mendeleieff* de Elementos Químicos, sin otros datos que el símbolo químico y el número atómico:

SISTEMA PERIÓDICO DE LOS ELEMENTOS

Número atómico → 1
Masa atómica* → 1,008
Nombre → Hidrógeno
H ← Símbolo

Negro – sólido
Azul – líquido
Rojo – gas
Violeta – artificial

* Un número entre paréntesis indica el número de masa atómica del isótopo conocido de vida media más larga.

Período \ Grupo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1																		2 He 4,003 Helio
2	3 Li 6,94 Litio	4 Be 9,01 Berilio											5 B 10,81 Boro	6 C 12,01 Carbono	7 N 14,01 Nitrógeno	8 O 16,00 Oxígeno	9 F 18,99 Flúor	10 Ne 20,18 Neón
3	11 Na 22,99 Sodio	22 Mg 24,31 Magnesio											13 Al 26,98 Aluminio	14 Si 28,09 Silicio	15 P 30,97 Fósforo	16 S 32,07 Azufre	17 Cl 34,45 Cloro	18 Ar 39,95 Argón
4	19 K 39,10 Potasio	20 Ca 40,08 Calcio	21 Sc 44,96 Escandio	22 Ti 47,90 Titanio	23 V 50,94 Vanadio	24 Cr 52,00 Cromo	25 Mn 54,94 Manganeso	26 Fe 55,85 Hierro	27 Co 58,93 Cobalto	28 Ni 58,70 Níquel	29 Cu 63,55 Cobre	30 Zn 65,38 Cinc	31 Ga 69,72 Galio	32 Ge 72,59 Germanio	33 As 74,92 Arsénico	34 Se 78,96 Selenio	35 Br 79,90 Bromo	36 Kr 83,80 Criptón
5	37 Rb 85,47 Rubidio	38 Sr 87,62 Estroncio	39 Y 88,91 Itrio	40 Zr 91,22 Circonio	41 Nb 95,91 Niobio	42 Mo 95,94 Molibdeno	43 Tc (97) Tecnecio	44 Ru 101,07 Rutenio	45 Rh 102,91 Rodio	46 Pd 106,4 Paladio	47 Ag 107,87 Plata	48 Cd 112,40 Cadmio	49 In 114,82 Indio	50 Sn 118,69 Estaño	51 Sb 121,75 Antimonio	52 Te 127,60 Teluro	53 I 126,90 Yodo	54 Xe 131,30 Xenon
6	55 Cs 132,91 Cesio	56 Ba 137,33 Bario	57 La 138,91 Lantano	72 Hf 178,49 Hafnio	73 Ta 180,95 Tántalo	74 W 183,85 Wolframio	75 Re 186,21 Renio	76 Os 190,2 Osmio	77 Ir 192,22 Iridio	78 Pt 195,09 Platino	79 Au 196,97 Oro	80 Hg 200,59 Mercurio	81 Tl 204,37 Talio	82 Pb 207,19 Plomo	83 Bi 208,98 Bismuto	84 Po (209) Polonio	85 At (210) Astato	86 Rn (222) Radón
7	87 Fr (223) Francio	88 Ra (226) Radio	89 Ac (227) Actinio	104 Rf (261) Rutherfordio	105 Db (262) Dubnio	106 Sg (263) Seborgio	107 Bh (264) Bohrio	108 Hs (265) Hassio	109 Mt (268) Meitnerio	110 Uun (269) Ununnilium	111 Uuu (272) Unununium	112 Uub (277) Ununbium						

Lantánidos 6	58 Ce 140,12 Cerio	59 Pr 140,91 Praseodimio	60 Nd 144,24 Neodimio	61 Pm (145) Promecio	62 Sm 150,35 Samario	63 Eu 151,96 Europio	64 Gd 157,25 Gadolinio	65 Tb 158,93 Terbio	66 Dy 162,50 Disprosio	67 Ho 164,93 Holmio	68 Er 167,26 Erbio	69 Tm 168,93 Tulio	70 Yb 173,04 Iterbio	71 Lu 174,97 Lutecio
Actínidos 7	90 Th 232,04 Torio	91 Pa (231) Protactinio	92 U 238,03 Uranio	93 Np (237) Neptunio	94 Pu (244) Plutonio	95 Am (243) Americio	96 Cm (247) Curio	97 Bk (247) Berquelio	98 Cf (251) Californio	99 Es (254) Einstenio	100 Fm (257) Fermio	101 Md (258) Mendelevio	102 No (255) Nobelio	103 Lr (260) Laurencio

Metales
Semimetales
No metales
Gases nobles

a) Si se pretende un *cuadro* en *formato reducido*, apto para ser llevado encima y poder consultarse en cualquier momento —hasta llegar a una memorización relativa—, nuestro objetivo será reducir al máximo sus dimensiones. Suprimamos, pues, sus *líneas de separación*, que tampoco deberán sustituirse por *líneas en blanco*, ya que no serán precisos cálculos o exploraciones complejas.

b) Por otra parte, el *prefijo de mayúscula*, exclusivo del Braille, puede ser también suprimido: todos los símbolos químicos tendrán su primera letra en mayúscula y la segunda minúscula, en su caso.

c) Se observa en la *Tabla* una porción perturbadora: el conjunto de los llamados *elementos de transición*. Puede pensarse en extraerlo *en bloque* de la *Tabla general*, y considerarlo como *tabla adjunta* o *separada*. En su lugar podemos incluir una *llamada* o *signo sustitutorio*; por ejemplo, el *signo generador* (⠿, puntos 123456).

d) Las familias de *lantánidos* (*tierras raras*) y *actínidos* (*elementos transuránicos*) deberían incluirse en las casillas correspondientes a los que les dan nombre. Tal como se hace ordinariamente *en tinta*, se les incluye en *tabla adjunta*, al igual que para los *elementos de transición*.

Los dos últimos recursos suponen una *reestructuración o desglose de la tabla*, que, como se ha indicado, también es frecuente en tinta. En alguna forma, sería una aplicación de la técnica de *partición en módulos de acceso*.

La inclusión de los correspondientes *Números Atómicos* suponen una dificultad aparentemente insalvable, si en verdad se desea una *tabla en formato reducido*, susceptible de *llevar consigo*. Veamos algunas posibles soluciones.

— Renunciar a las deseadas *dimensiones reducidas* y conformarse con un formato de aproximadamente *doble página Braille*.

— Renunciar a su inclusión, como se ha prescindido *a priori* de otros valores (Masa Atómica, Radio Atómico, Potencial de Ionización, Puntos de Fusión y Ebullición, etc.) como contienen otros modelos.

— Desdoblar nuestra *Tabla* en un *juego de dos Tablas*: una exclusivamente con Símbolos Atómicos y otra con sólo Números Atómicos. La correspondencia quedaría a merced de establecer la posición exacta del elemento en ambas *subtablas*.

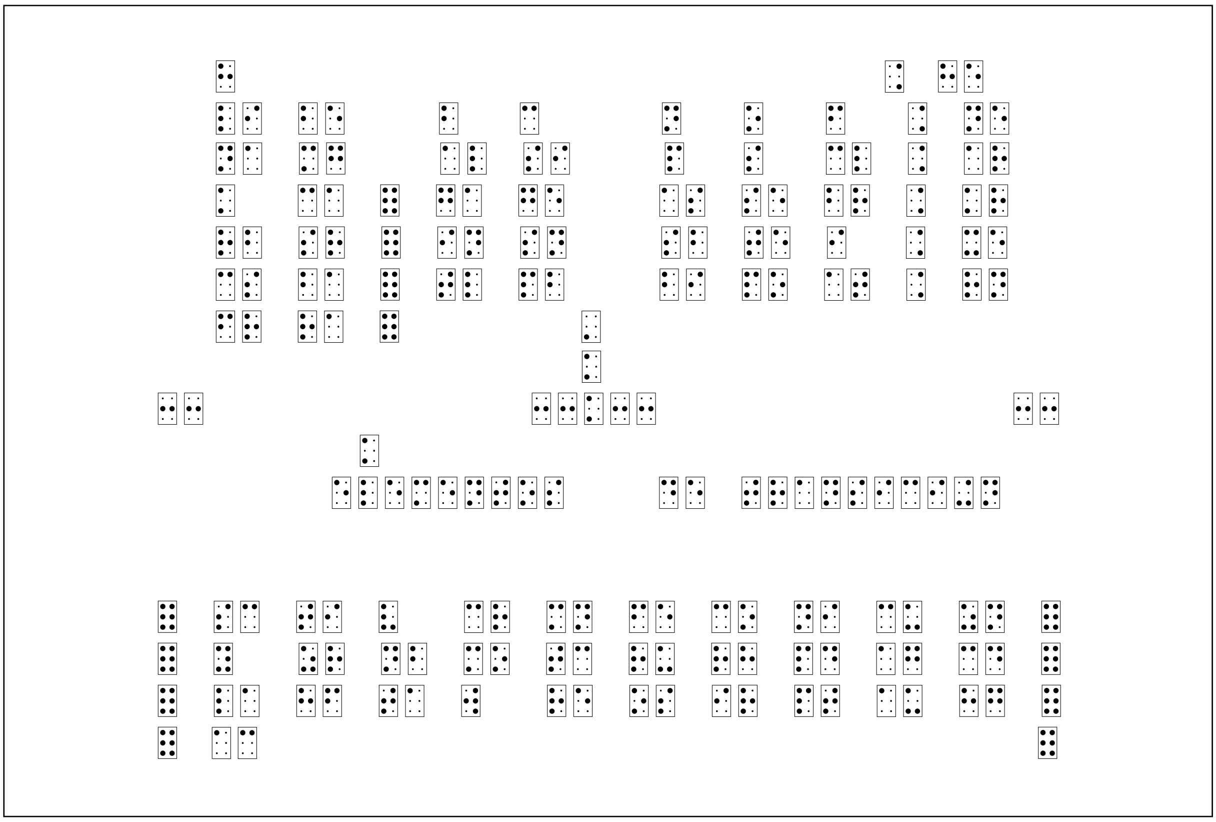
— Aprovechar la sucesión numérica por *filas* o *columnas* —aunque un tanto dislocada— para adscribir su Número Atómico a tan sólo determinados elementos que servirían de referencia para el resto conforme a ciertas reglas.

Esta última será la solución que se ofrezca en el Apartado siguiente. Pero, por el momento, simplifiquemos la *tabla*, conformándonos con una presentación espacialmente estructurada de los Elementos Químicos, objetivo final de la *tabla*.

e) La nomenclatura de *períodos* y *grupos* resulta en principio innecesaria, ya que responde a un orden bien definido. No obstante, si se desea, podría incluirse, a costa de las correspondientes columnas y filas adicionales (lo que también posponemos al próximo Apartado).

Aplicando estos criterios resulta:

Tabla 4-10. Tabla de elementos químicos. Mendeleieff. (Sólo símbolos) Versión reducida para Braille



El plegado por las líneas que se indican permite reducir el tamaño total a un cuarto: se obtiene así una *tabla periódica de bolsillo*, muy simple, pero didácticamente útil.

A fin de facilitar su manejo, es preferible que una de las dos mitades de la Tabla se transcriba en *signos simétricos respecto de eje horizontal o que se proceda al corte y pegado posterior.*

4.3.3. EMPLEO DE *SIGNOS CONVENCIONALES*

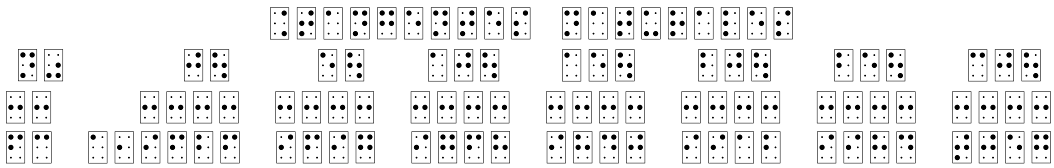
La penuria de dimensiones de la *página Braille* o el deseo de economizar espacio a ultranza —en busca de *formatos de bolsillo*— obliga o invita en ocasiones a agotar los recursos simbólicos y a introducir *convenios locales*.

Las *Tablas Trigonométricas* editadas por la ONCE en su última versión (Francisco Rodrigo, 1974) ofrecen una muestra de este afán/necesidad economizador.

En las *Tablas de tangentes/cotangentes*, por ejemplo, y por razones de espacio, sólo se incluye la parte entera del valor primero de la línea (correspondiente a un cierto número de grados). Si dicha parte entera se modifica en el interior de la línea (aumenta una unidad), tal cambio se indica provisionalmente (hasta la nueva línea) añadiendo el *punto 3* al primero de los caracteres/dígito.

Tabla 4-11. Tabla trigonométrica de tangentes naturales
Caso: cambio de parte entera en el interior de una línea

TANGENTES NATURALES							
No	0’	5’	10’	15’	20’	25’	30’
63°	1,9626	9697	9768	9840	9912	9984	$\underline{0}$057



Retomemos el ejemplo de la *Tabla de Elementos Químicos* del Apartado anterior, para completarla incluyendo referencias a Números Atómicos, denominaciones de *Períodos* y *Grupos*, y algún otro aspecto.

a) *Números Atómicos*. Observando la sucesión numérica de la *tabla principal*, podemos ver que se interrumpe precisamente por los *elementos de transición* para ser retomada de nuevo. En otras palabras: existen para cada Período —a partir del 3°— dos subsecuencias a contar desde los Elementos extremos. Así pues, adjuntando a éstos su *Número Atómico* sería posible adjudicarlo también a los restantes, sin más que añadir o retirar de ese valor el lugar relativo que ocupen.

Pero, aunque estamos dispuestos a economizar espacio a toda costa, la supresión del *signo de número* podría dar lugar a equívocos con los símbolos atómicos. Una solución convencional sería la de emplear para esta numeración marginal el código de *Braille computarizado* (incluyendo el *punto 6*).

b) Nomenclatura de *períodos* y *grupos*. La *notación computarizada* para la numeración atómica resuelve, de nuevo, el problema de que esta nomenclatura exceda la columna a que se refiere.

c) Por último, es frecuente que se distinga entre *metales* y *no metales* —para el conjunto total— o *frágiles* y *dúctiles* para los *elementos de transición*; caracterización que no raras veces se hace mediante *colores de fondo*, aunque también suelen emplearse *líneas de separación*.

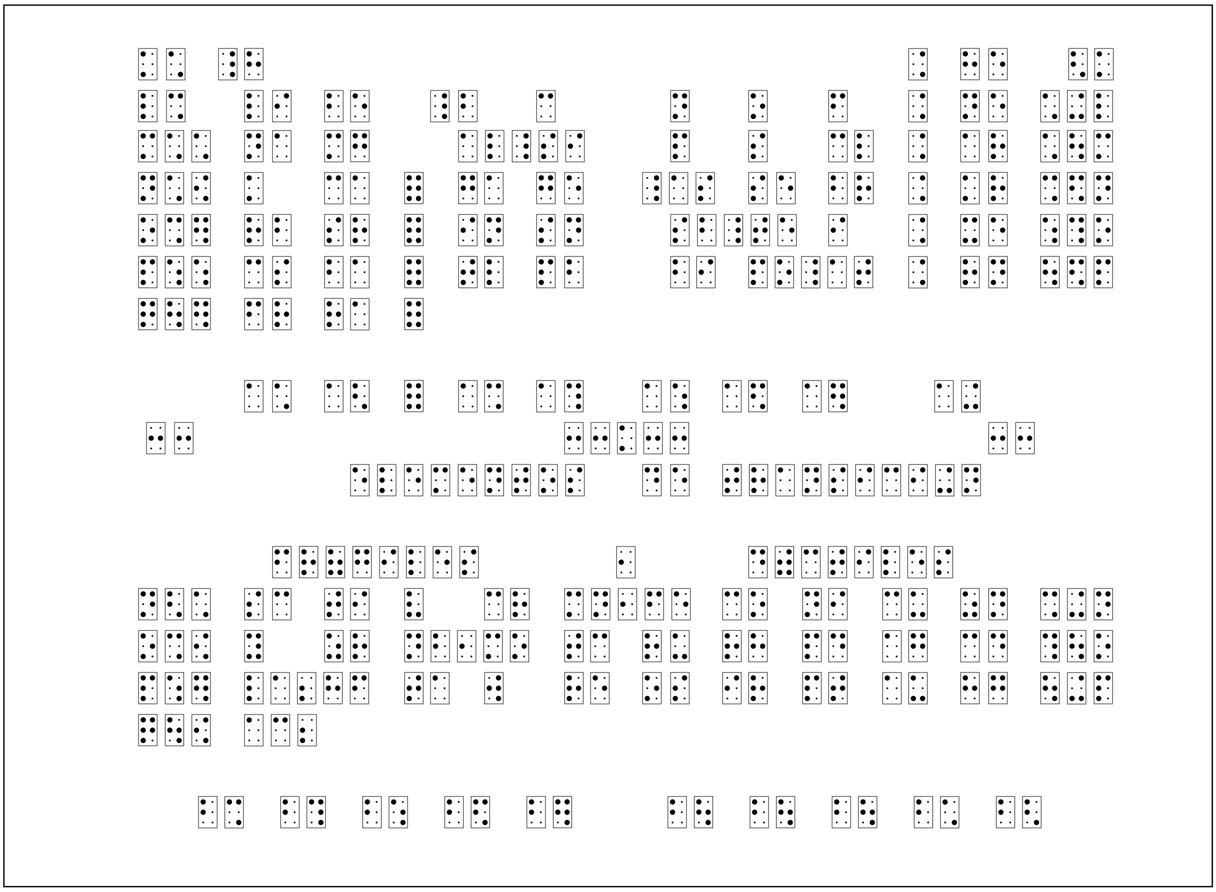
Una y otra clasificación pueden indicarse mediante *signos especiales*; aquí hemos optado por los llamados *prefijos Braille*, combinación de los puntos 456). Al determinar *regiones compactas* de la *Tabla*, basta con indicar la *línea quebrada de separación de segmentos*; o, lo que es lo mismo: anteponer el *signo identificador* solamente al primero de ellos para cada *período*:

— El signo ⠸ (puntos 456) para la separación entre *metales* y *no metales*.

— El signo ⠂ (coma, punto 2), para la separación entre metales *frágiles* y *dúctiles*, en los *elementos de transición*.

— El signo ⠆ (puntos 23) indica que en el lugar del Lantano y del Actinio deben considerarse otros elementos (*lantánidos* o *tierras raras* y *actínidos* o *transuránicos*).

Tabla 4-12. Tabla de elementos químicos. Mendeleieff. (símbolos, números atómicos, clasificaciones y cabeceras). Versión reducida para Braille



5. DIBUJAR EN BRAILLE. OTRAS REPRESENTACIONES BIDIMENSIONALES

En la Introducción se hacía referencia a la importancia que han adquirido los llamados medios gráficos; tanto en la Didáctica de la Matemática como prácticamente en la de todos los campos del saber.

Por lenguaje gráfico-geométrico entendemos no sólo aquellas representaciones que constan esencial o parcialmente de dibujos geométricos o figurativos. Por extensión, comprendemos toda representación en la que juegue un papel decisivo la bidimensionalidad, rompiendo con la relativa linealidad de la escritura ordinaria, que intenta reproducir la secuencialidad absoluta del lenguaje oral. Es decir: las expresiones en las que la distribución de espacios o los puntos y líneas jueguen un papel significativo, imposible de reducir a lenguaje oral, salvo descripciones prolijas y farragosas.

Una simple reflexión pone de relieve numerosas dimensiones del valor didáctico de este tipo de representaciones:

— **Valor ilustrativo**: hacer visible el Álgebra, la Aritmética, la Lógica.

— **Ayuda a la comprensión**. Al permitir la presentación de un mismo concepto o técnica en variedad de formas expresivas.

— **Resaltadora de la dimensión abstracta de conceptos y técnicas**. Lo que parece paradójico; pues si bien ofrece una plasmación concreta —en alguna medida— de un concepto, lo presenta también como menos dependiente de la precisión simbólica o conceptual.

— **Valor de fijación conceptual**. Ya que las formas geométricas se aprehenden y retienen —por diversos motivos— con mayor facilidad que las series numéricas y expresiones simbólicas.

— **Facilidad comunicativa**. Las formas y comportamientos espaciales y geométricos son más fáciles de transmitir y corregir que las otras formas de expresión. Lo que no significa que sean más precisas.

— **Ayuda a la conceptualización**. En la medida que todo concepto tiene un referente representativo (interior), que muy posiblemente pueda expresarse en lenguaje gráfico-geométrico. Además, admiten más fácilmente la descripción y empleo de sinonimias en lengua natural que el lenguaje de números y símbolos estrictamente matemáticos.

— **Posibilidades motivacionales**. La multiplicidad de lenguajes empleados tiene en sí misma un valor motivacional, al introducir variedad en la tarea didáctica. Pero, además, las formas y comportamientos geométricos permiten más fácilmente el recurso a modelos y metáforas que se adecuen a los intereses y sensibilidad del alumno.

— **Valor formativo**. Abriendo horizontes expresivos y de comunicación con otras ciencias en aspectos cuantificables (en sentido amplio: relación entre partes).

— **Ayuda al proceso de descubrimiento**. En cuanto que las piezas geométricas son más inmediatas de visualizar y combinar, resaltar diferencias y concordancias, inducir leyes de formación, etc.

Se descartan en este Capítulo las tablas y cuadros, ya contempladas en el Capítulo precedente, y por cuanto que estas estructuras pueden reducirse a formas lineales, sin más que proceder a su lectura yuxtapuesta. Tampoco se tratará la representación de algoritmos aritméticos o algebraicos (Secciones 1.2 y 2.5), por su carácter tradicional y sustantivo. Pero —quede constancia— de que todas ellas participan en sus aspectos formal e intencional de la bidimensionalidad.

En las páginas que siguen no se consideran todas las formas de lenguaje gráfico-geométrico. Tan sólo las más frecuentes, y para las que hemos hallado soluciones medianamente satisfactorias sirviéndonos de la máquina Perkins.

5.1. DIAGRAMAS LINEALES

El *diagrama lineal* por excelencia en Matemáticas es la *representación de la recta real*; por restricción a subconjuntos, válida como representación para los números naturales, enteros y racionales.

Parece difícil armonizar la característica de *bidimensionalidad* del *lenguaje gráfico-geométrico* con la mera *linealidad de la recta*. Mas admitámosla, como *primer escalón* en la progresión de formas geométricas que seguirán. Además, veremos cómo el Braille, por la escasa disponibilidad de espacio por línea, precisará de varias de ellas, rompiendo la *linealidad en tinta* y pasando a ser un verdadero *diagrama bidimensional*.

En puridad, la representación de la *recta real* no tiene por qué serlo como *recta horizontal*. Pero es ésta la más adecuada y cómoda para realizar en la máquina Perkins. Advirtamos, sin embargo, del riesgo que supone acudir exclusivamente al *estereotipo horizontal*, que debe complementarse con el dibujo en pluralidad de posiciones sirviéndose de la *lámina de caucho* u otro dispositivo, o rotando las representaciones braille construidas.

Con frecuencia, se indican en la *recta* o *diagrama lineal* ciertos *puntos* o *valores* a los que se hace referencia en el transcurso de la tarea. Para designarlos, basta marcar tales puntos de la *recta* con un *signo diferenciador*, y, en línea contigua, los símbolos correspondientes a dichos valores:

Tabla 5-1. Representación elemental de la recta lineal

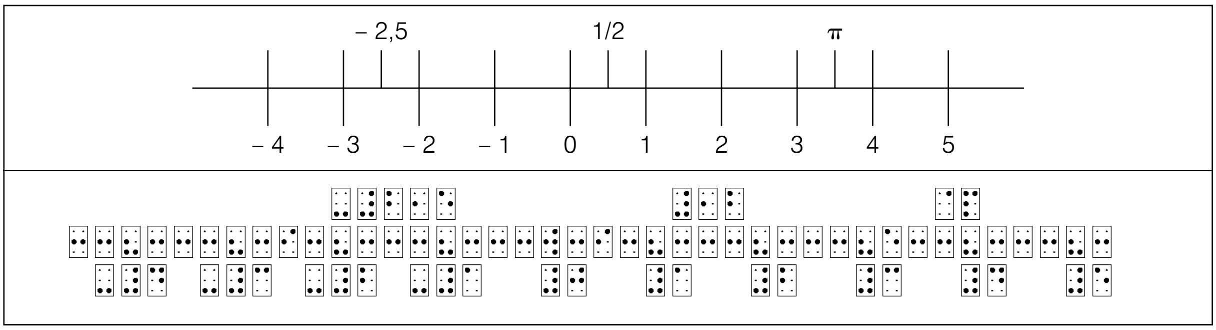


Tabla 5-2. Signos braille para representación de la recta real

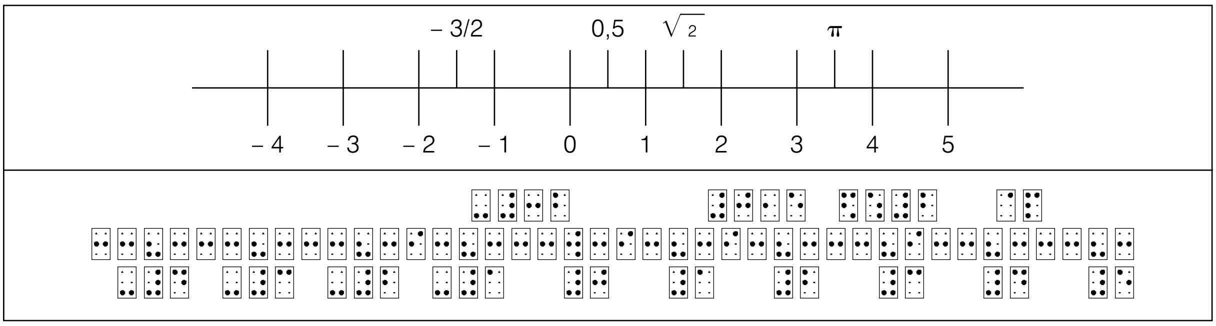
Signos	Códigos
⠒⠒⠲⠒⠒⠒⠲⠒⠒⠒	25,256,25..
⠂⠂⠆⠂⠂⠂⠆⠂⠂⠂	2,23,2...
⠐⠐⠰⠐⠐⠐⠰⠐⠐⠐	5,56,5...

Parece preferible el empleo del tipo primero (⠒, puntos 25), por su *quasi-continuidad* al tacto, y resaltar mejor otros tipos de signos que pudieran emplearse para marcar *puntos distinguidos*, *intervalos*, *semirrectas*, etc.

Tabla 5-3. Signos Braille para marcado de puntos significativos

⠓	⠚	⠑	⠊	⠖	⠲	⠢	⠔
125	245	15	24	235	256	26	35
Códigos							

Tabla 5-4. Diagramas lineales. Marcado de puntos significativos



Puede ocurrir que el diagrama en tinta resalte una porción de la recta mediante trazo grueso, color diferente, doble trazo, llave horizontal, etc. Dado que la finalidad es distinguir dicha porción, bastará emplear en ella un signo Braille diferente del resto:

Tabla 5-5. Representación braille de la recta real con diferenciación de subconjuntos

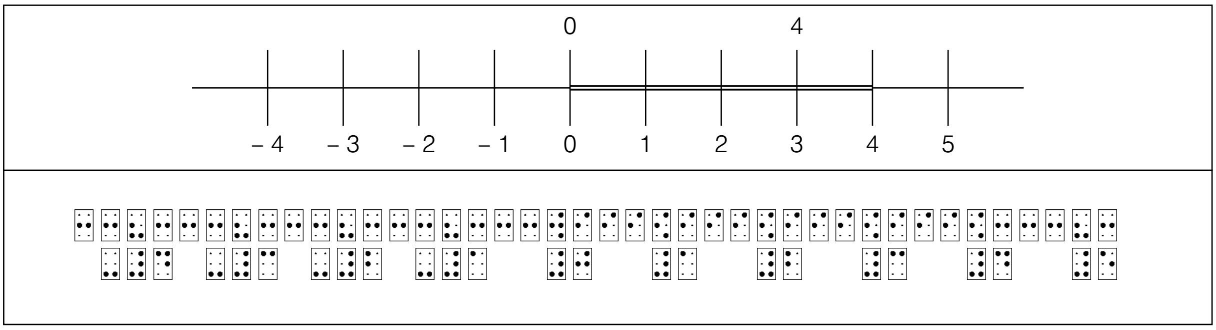
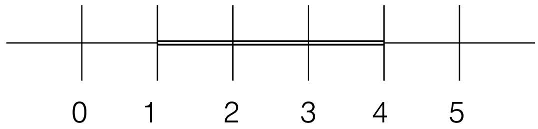
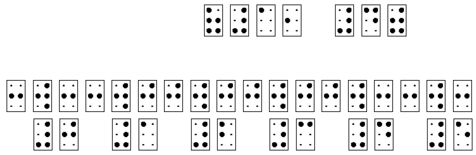
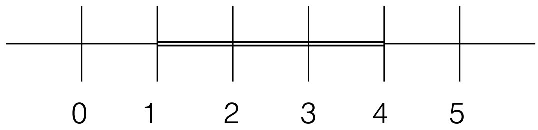
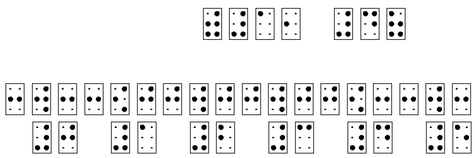
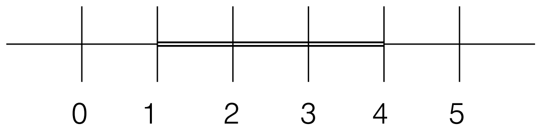
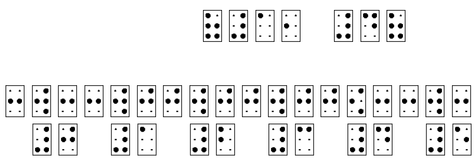
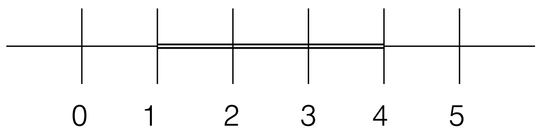
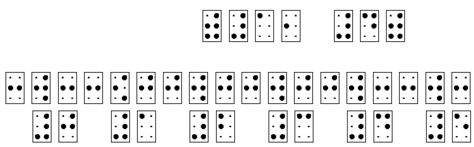


Tabla 5-6. Signos Braille para la representación de subconjuntos significativos

⠑⠑⠑	⠊⠊⠊	⠛⠛⠛	⠢⠢⠢	⠔⠔⠔	⠶⠶⠶
15	24	1245	26	35	2356
Códigos					

Más complejo será especificar si los puntos frontera pertenecen o no a la porción resaltada. Algo que tampoco es fácil de explicitar gráficamente en Tinta cuando sólo se trabaja en blanco y negro. Será preciso entonces acudir a convenios locales, o adjuntar la expresión simbólica:

Tabla 5-7. Tipos de segmentos/intervalos en la recta real

Cerrado	(1, 4)  
Abierto	)1, 4( 
Semicerrado por la izquierda (semiabierto por la derecha)	(1, 4( 
Semicerrado por la derecha (semiabierto por la izquierda)	)1, 4)  

Obsérvese la importancia que en estos diagramas adquiere la elección del signo Braille para el trazado de la recta-base. Al tomar el signo formado por puntos de la zona media de la celdilla braille (puntos 25), permite situar los trazos señaladores de puntos en uno u otro semiplano, así como elegir el mismo o el contrario para indicar el segmento a resaltar.

Tabla 5-8. Representación de segmentos y puntos frontera

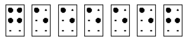
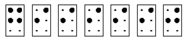
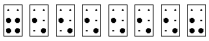
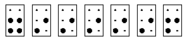
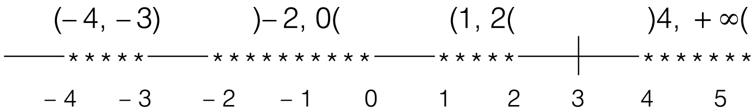
	...,15,15,15,...			...,24,24,24,...	
1245		125	1245		245
pertenece		no pertenece	pertenece		no pertenece
2356		236	2356		235
	...,26,26,26,...			...,35,35,35,...	

Tabla 5-9. Diagramas lineales. Representación braille de tipos de intervalos



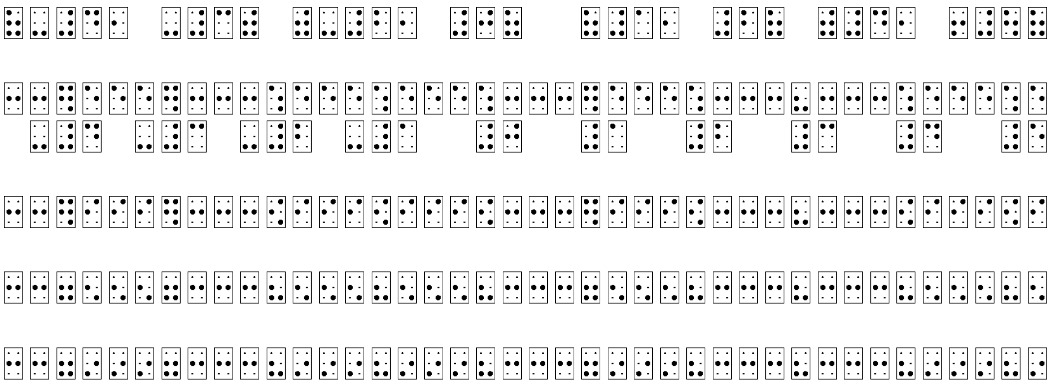
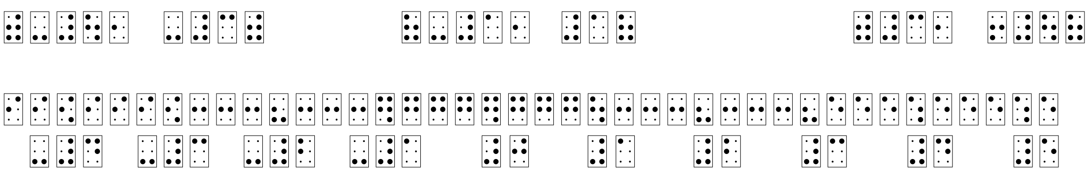
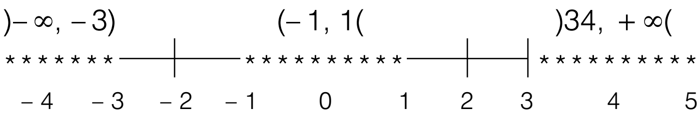


Tabla 5-10. Diagramas lineales. Representación de semirrectas y segmentos





REPRESENTACIÓN BRAILLE DE *DIAGRAMAS LINEALES*

1º Para representar *diagramas lineales*, relacionados directa o indirectamente con la *recta real*, se emplea una sucesión de signos Braille en contigüidad (ver modelos en tabla 5-2).

2º Para *puntos/marca a resaltar* se emplean de modo uniforme signos Braille distintos de los anteriores (ver tablas 5-2, 5-3 y 5-4).

3º Se indicará el menor número posible de estos *puntos/marcas:* sólo los que intervengan en la tarea o sean convenientes por motivos de referencia; de modo que la distancia entre ellos sea máxima.

4º En las líneas contiguas anterior y/o posterior se escriben las expresiones simbólicas correspondientes a los *puntos marcados* o a los más significativos (0, 1, – 1). (Ver tabla 5-4 y ss.)

5º Si además de los *puntos/marca de la serie entera* deben figurar otros significativos, la notación simbólica de unos y otros se situarán preferentemente en semiplanos distintos (ídem).

6º Si el número de puntos a indicar es tal que sus notaciones simbólicas (de ser precisas) superan las dimensiones de la *línea Braille*, puede optarse por dos soluciones:

— Indicar sólo algunos de tales puntos o incluir la notación para los más significativos (ver tabla 5-11).

— Marcar todos los puntos y símbolos deseados, pero sirviéndose de dos líneas para emplazar alternativamente las notaciones simbólicas (ver tabla 5-12).

7º Para los *segmentos*, *semirrectas* o *subconjuntos conexos* se emplea un *signo Braille* distinto de los anteriores (por ejemplo los señalados en la tabla 5-6).

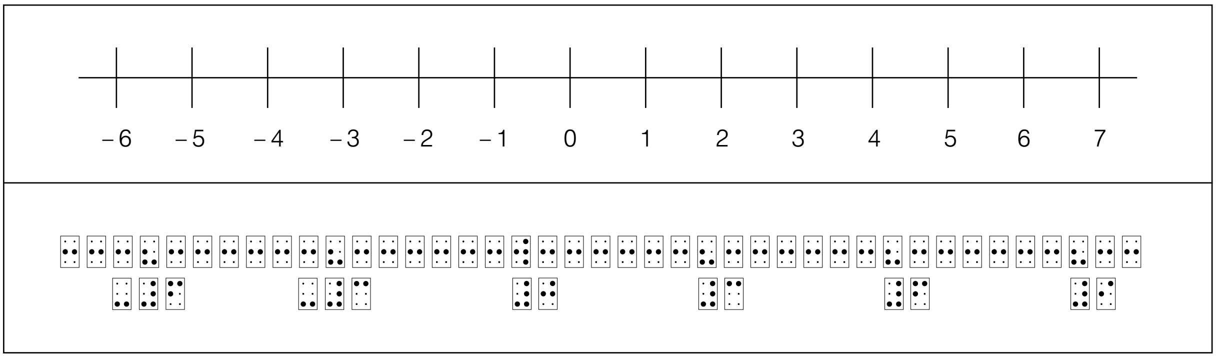
Con preferencia, los *segmentos* o *conjuntos conexos* se representarán en el semiplano contrario a aquél en que aparezcan las marcas y símbolos de puntos de la recta (ver tablas 5-5, 5-9 y 5-10).

8º De ser preciso distinguir si se consideran o no los *puntos frontera*, se emplearán signos diferentes según que el punto *pertenezca o no al subconjunto* (ver tablas 5-8 y 5-9).

9º Si el diagrama incluye otra información literal o simbólica, se situará en el semiplano contrario al que contiene la denominación numérica (de incluirse ésta). En caso de hallarse ocupadas las líneas tanto anterior como posterior a la de la *recta-base*, se recurriría a la contigua (ver tabla 5-13).

Si tal información adicional excediera las posibilidades del espacio disponible, puede recurrirse, en última instancia, a la representación en *disposición vertical* (ver tabla 5-14).

Tabla 5-11. Diagramas lineales. Marcado incompleto de puntos-referencia.



Con el criterio/recomendación 3° se persiguen dos objetivos:

— reducir la densidad de información táctil a incluir en la situación;

— facilitar la interpolación de nuevos puntos/marca.

Tabla 5-12. Diagramas lineales. Versión Braille con puntos de referencia en doble línea.

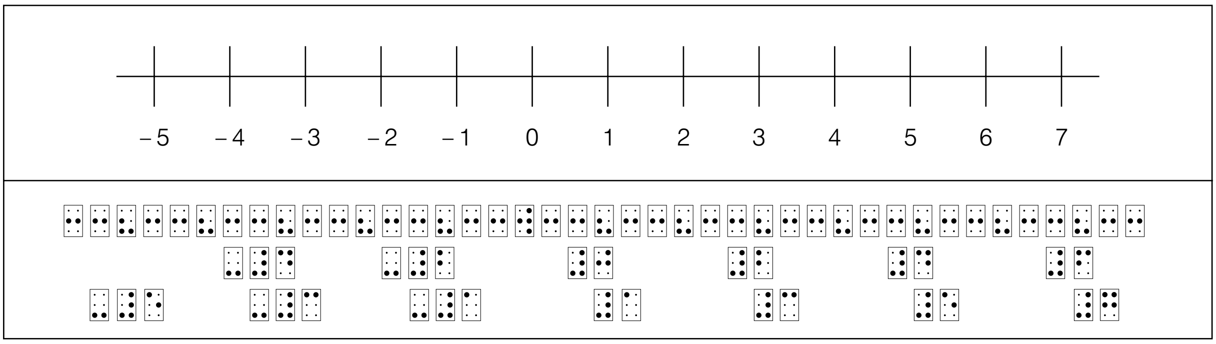


Tabla 5-13. Diagrama lineal con información literal adicional

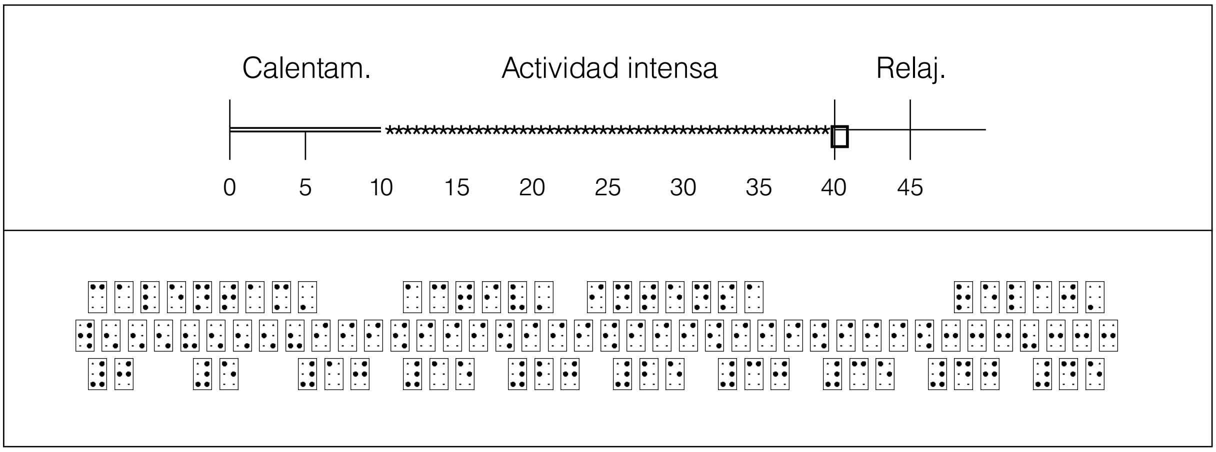
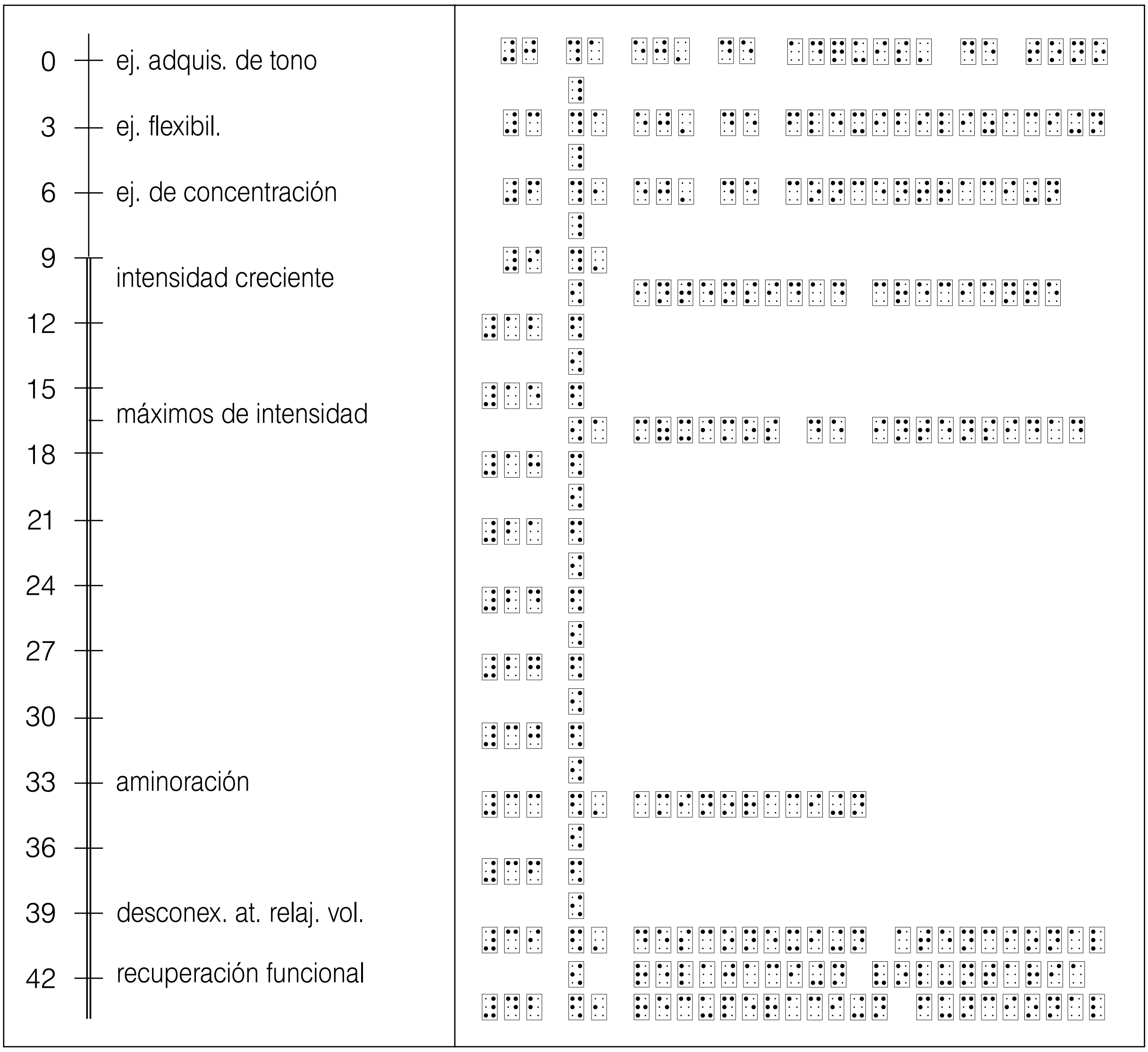


Tabla 5-14. Diagramas lineales. Ejemplo de disposición vertical en Braille



Conviene no olvidar que este formato vertical es mucho más costoso de realizar por el alumno (no tanto de explorar). Será, pues, preferible prescindir de cuanta información superflua o redundante sea posible, hasta lograr que el diagrama requerido sea admitido en la longitud de línea de 40 caracteres.

5.2. DIAGRAMAS RECTANGULARES

Se incluye aquí toda una familia de representaciones claramente bidimensionales. En unas prima el carácter geométrico:

— Mallas o redes ortogonales de puntos.

— Diagramas cartesianos sencillos.

— Diagramas de itinerarios (poligonales rectangulares).

— Histogramas simples y diagramas de bloques.

— Gráficas de funciones en escalera.

Otras participan más propiamente del carácter de tabla o cuadro:

— Tablas de correspondencias o relaciones binarias.

— Diagramas de Carroll.

— Diagramas de Karnaugh.

Todas ellas poseen tres elementos comunes:

a) Abarcan una región rectangular del plano —que excede de la simple línea de escritura—, a ocupar total o parcialmente (de aquí el nombre).

b) Los lugares o regiones a considerar quedan determinados por pares de coordenadas enteras (naturales, deberíamos acotar); aunque dependientes de las estructuras que a priori se fijen para las referencias.

c) Los únicos elementos geométricos que incluyen son puntos y segmentos rectilíneos; éstos, paralelos a los lados —ejes— del rectángulo escenario.

Su aplicación en Matemáticas y cualquier otra ciencia es prácticamente ilimitada. Basta considerar un aspecto cuantificable, para que una sucesión de valores o estados admita su expresión por alguna de las formas indicadas.

Comencemos su tratamiento Braille, considerando en este Apartado aquéllos que más se aproximan a las características expresivas de una tabla o cuadro.

5.2.1. TABLAS/DIAGRAMA CARTESIANAS DE CORRESPONDENCIAS Y RELACIONES BINARIAS

Una correspondencia —o relación— entre dos conjuntos es, por definición, "un conjunto de «pares ordenados» cuyos primeros elementos pertenecen al primer conjunto, y los segundos al segundo conjunto". Si ambos conjuntos —inicial y final— coinciden, la correspondencia pasa a llamarse relación binaria.

Esta correspondencia o relación entre elementos puede responder o no a un criterio o ley, dando lugar a una fórmula o definición formalizada; pero esto no es esencial (ver el ejemplo que, para una función numérica, se ofrecía en el Apartado 2.6.1).

Una tabla de correspondencia o relación binaria es, simplemente, “una «tabla» o «matriz rectangular» (eventualmente: «cuadrada»), en la que las «cabeceras de columnas y filas» son «los elementos del/de los conjuntos inicial y final»”. En ella se marcan las casillas correspondientes a los pares ordenados que definen la correspondencia o relación, dejando vacías las restantes. Se considera como primer elemento del par la cabecera (pie) de columna, y como segundo elemento la de fila.

Hasta tal extremo llega la semejanza con una tabla o cuadro ordinarios, que no es extraño que las casillas correspondientes a pares relacionados se marquen con un **1**, y con un **0** las de pares no relacionados. Mereciendo entonces el calificativo de tabla de verdad o tabla de existencia de la relación o función.

Es importante el convenio de emplazamiento y orden de cabeceras y pies, por cuanto anticipa con coherencia el convenio de coordenadas cartesianas. Así pues, podemos decir que “estaríamos representando en el primer cuadrante”.

El interés didáctico de estas tablas-diagramas estriba en que las propiedades de la relación o correspondencia se traducen inmediatamente en propiedades geométricas de la nube de marcas (unos) resultante. Para las relaciones, es preciso seguir el convenio de “igual ordenación de elementos en ambos conjuntos de cabeceras”:

Relaciones binarias

{(a,a), (a,b), (b,a), (b,b), (c.c), (d,d), (d,e), (d,f), (e,d), (e,e), (e,f), (f,d), (f,e), (f,f)}	{(a,a), (a,b), (a,d), (a,e), (a,f), (b,b), (b,d), (b,e), (b,f), (c,c), (c,d), (c,e), (c,f), (d,d), (d,e), (d,f), (e,e), (f,f)}

f	.	.	.	+	+	+
e	.	.	.	+	+	+
d	.	.	.	+	+	+
c	.	.	+	.	.	.
b	+	+	.	.	.	.
a	+	+	.	.	.	.
	a	b	c	d	e	f

f	+	+	+	+	+	+
e	+	+	+	+	+	.
d	+	+	+	+	.	.
c	.	.	+	.	.	.
b	+	+	.	.	.	.
a	+	.	.	.	.	.
	a	b	c	d	e	f

Expresión tabular de propiedades para las relaciones binarias

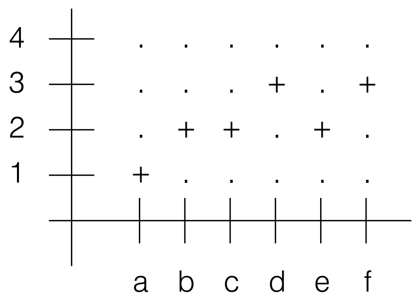
Propiedad Reflexiva	diagonal principal completa
Propiedad Antirreflexiva	diagonal principal vacía
Propiedad Simétrica	simetría respecto de la diagonal principal (bisectriz)
Propiedad Antisimétrica	ningún par de puntos simétricos respecto de la diagonal principal

La Propiedad Transitiva es menos visualizable, aunque podría comprobarse mediante doble plegado (sirviéndose de una lámina transparente o recurriendo al trasluz). Por el contrario, resultan inmediatas las caracterizaciones de elementos aislados, mínimo, minimales, máximo, maximales, propiedad conexa, etc. para las relaciones de orden, o la división en subtablas completas —clases, conjunto cociente— para las relaciones de equivalencia.

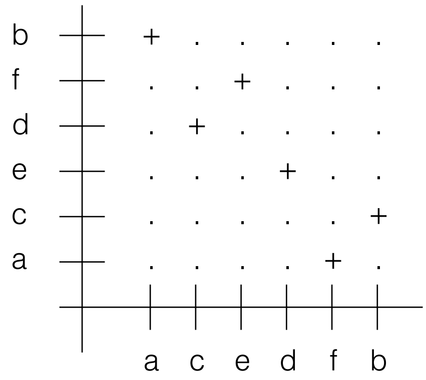
Hay que subrayar que el término diagonal principal (bisectriz de este primer cuadrante), aunque coincide conceptualmente con el mismo en las tablas numéricas y matrices, difiere en su expresión geométrica, al haberse rotado la posición de filas/columnas y sus cabeceras.

Correspondencias/funciones

{(a,1), (b,2), (c,2), (d,3), (e.2), (f,3)}



{(a,b), (c,d), (e,f), (d,e), (f,a), (b,c)}



Expresión tabular de propiedades para las correspondencias

Dominio u Original	columnas con alguna marca
Recorrido o Imagen	filas con alguna marca
Función (en sentido estricto)	las columnas tienen, como mucho, una sola marca
Aplicación	todas las columnas tienen una marca, y sólo una
Suprayectividad	todas las filas tienen alguna marca
Inyectividad	las filas con marca, sólo tienen una
Biyectividad	en cada columna y fila sólo hay una marca
Correspondencias/ Funciones Inversas	tablas simétricas respecto de la diagonal principal

Las caracterizaciones geométricas coinciden con las aplicables en el Análisis de funciones reales de variable real para sus gráficas cartesianas.

La diferencia esencial con ciertas tablas —por ejemplo: las de operaciones binarias en conjuntos finitos— estriba en que en éstas interesan únicamente las posiciones de las marcas, mientras que en aquéllas también deciden los valores de cada posición o casilla. Sólo interesa la configuración global de la nube de marcas o puntos resultante.

Respecto de las gráficas o representaciones cartesianas por coordenadas, propiamente dichas les separa una notable diferencia. Aquí, se confiere a priori una ordenación lineal en cada conjunto-referencia, mientras que ésta es intrínseca a los conjuntos numéricos en las representaciones cartesianas. Por consiguiente, el diagrama que se obtenga será tributario de tales ordenaciones: una misma correspondencia puede tener numerosas tablas/diagrama que la representen; si fuera numérica, sólo tendría una expresión cartesiana ordinaria (salvo isomorfismos del sistema de referencia).

Como se comentaba en la Introducción, la Teoría de Conjuntos ha perdido bastante de la fuerza que en un cierto momento se le concedió en el curriculum. Pero se considera como situación a transcribir, ya que aportará numerosas sugerencias para los modelos que siguen.

REPRESENTACIÓN BRAILLE DE TABLAS/DIAGRAMA CARTESIANAS DE RELACIONES Y FUNCIONES

Criterios de simplificación y configuración

1º Se prescinde de líneas definidoras de la malla o matriz.

2º Se toman como cabeceras (pies) de columna los elementos del conjunto inicial; y los del conjunto final como cabeceras de fila.

3º Las cabeceras de columna y fila se denotan y separan en forma tal que la malla resultante observe análogas unidades para su ancho y alto. Como criterio general: **cada fila Braille se equipara en su ancho geométrico a dos columnas.**

4º Se marcan los nudos correspondientes a pares relacionados mediante el signo ⠶ (puntos 2356) o ⠛ (puntos 1245; ver tablas 5-15 y 5-16).

5º Si las dimensiones de la matriz o malla excede de 5×5, se marcan también los nudos de la malla con un punto; lo que facilitará la exploración sin desviarse de la correspondiente columna o fila.

Tabla 5-15. Tablas/diagrama cartesianas de relaciones binarias y funciones o correspondencias

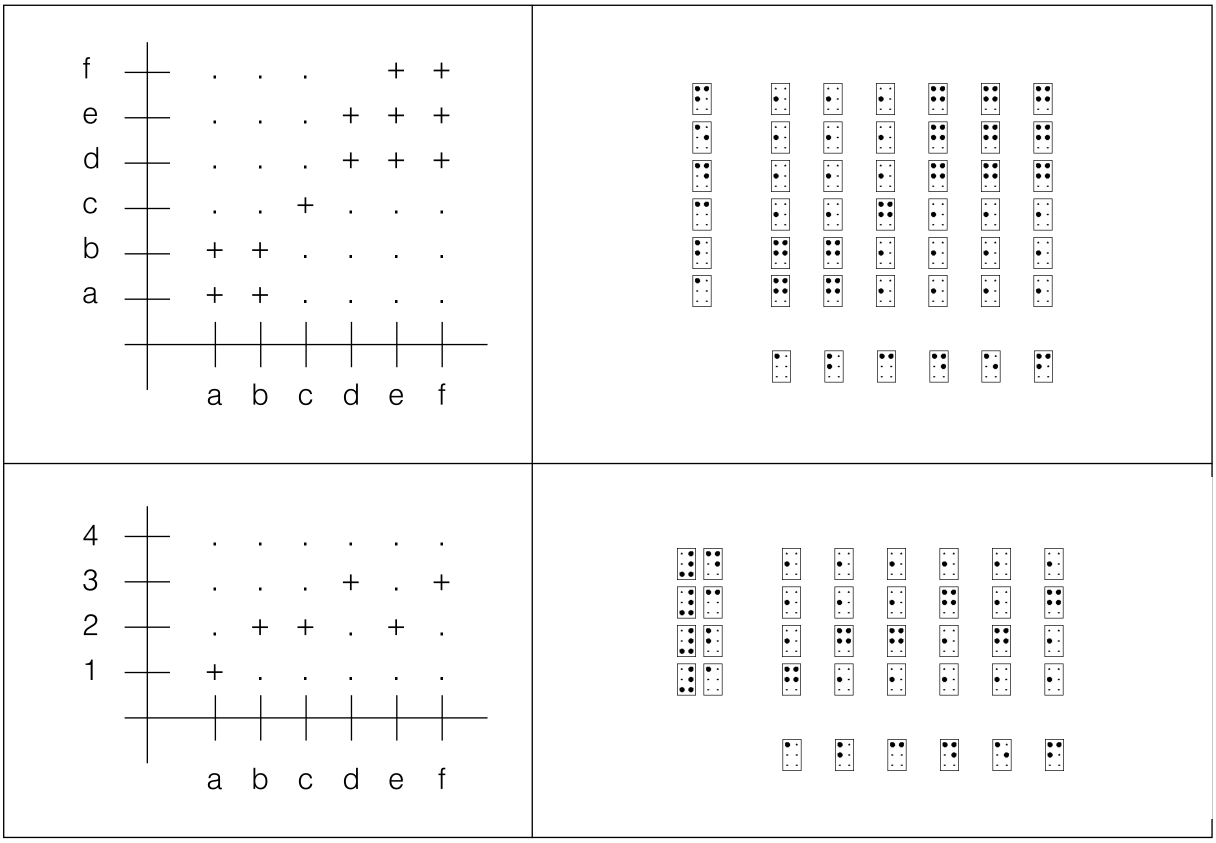
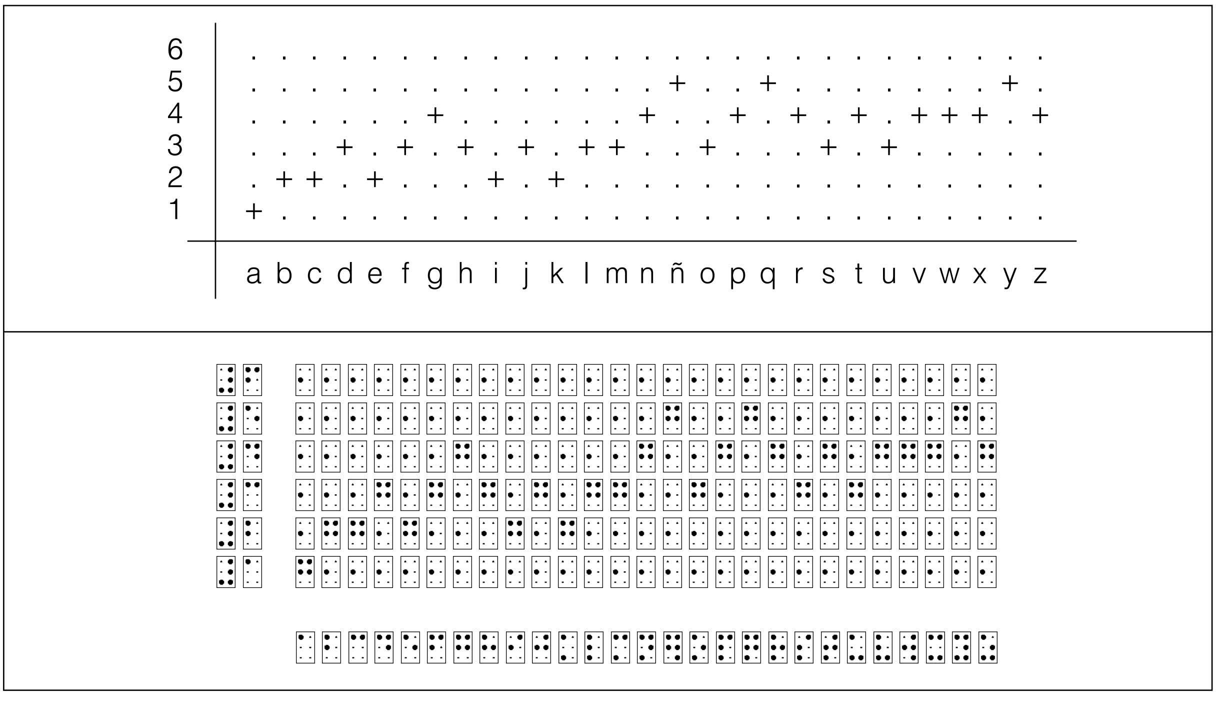


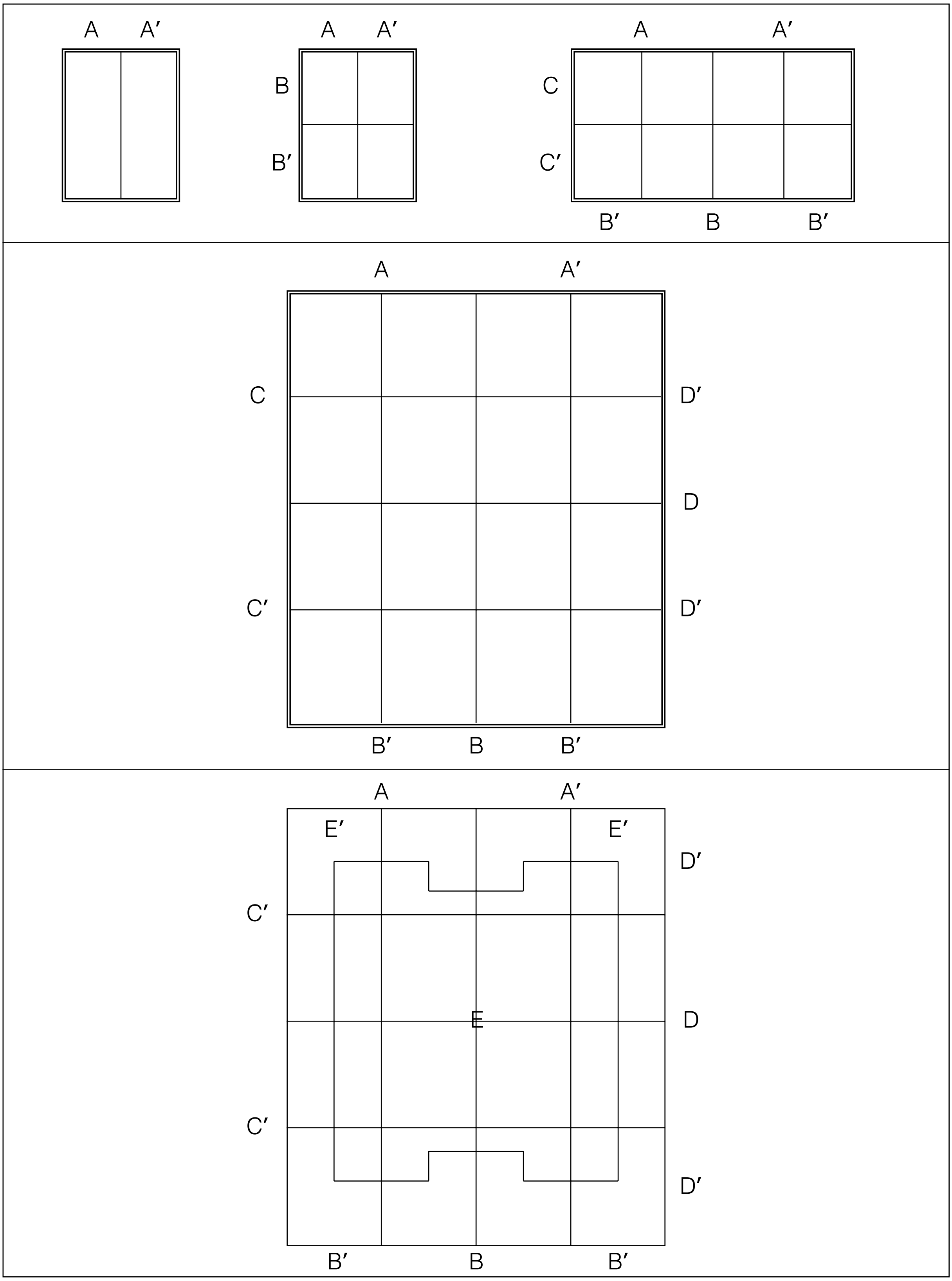
Tabla 5-16. Tablas/diagrama cartesianas de relaciones binarias y funciones o correspondencias (Caso: elevado número de elementos)



5.2.2. MAPAS/DIAGRAMAS DE KARNAUGH

Un diagrama o mapa de Karnaugh puede definirse como:

“Dado un «referente», representado por un rectángulo, toda «variable lógica» en él definida —«clase», «criterio» o «propiedad»— determina una partición o clasificación dicotómica en aquél, expresada mediante paralelas a los lados del rectángulo”.



Es inmediato comprobar que n «clases» o «variables lógicas» determinan 2^n regiones o casillas en el referente.

Pueden considerarse una generalización de los diagramas de Carroll, que no sobrepasarían el caso de dos conjuntos o clases.

El ancho de las bandas es indiferente —el tamaño relativo de las casillas, por tanto—, así como la posición que ocupen los indicadores de las variables. Aunque existe tendencia natural a la simetría (con casillas cuadradas o dobles cuadrados), y suele convenirse un orden y posición determinados para la introducción progresiva y emplazamiento de las «variables», que facilitarán la comunicación didáctica y la comparación geométrica de estados o funciones, incluso una cierta aritmetización del diagrama.

Como en el caso de las tablas/diagrama cartesianas de correspondencias, una misma función lógica —resultado de operaciones entre clases, variables o sucesos—, tendrá tantas expresiones gráficas como distintas sean las adscripciones a columnas y filas que hagamos de las variables intervinientes (sus permutaciones); incluso podríamos tomar en consideración otras no intervinientes. Según el problema a tratar —simplificación/cancelación, obtención de expresiones canónicas, etc.— se deducen isomorfismos de representación.

La aplicación de los diagramas de Karnaugh es muy amplia:

— Álgebra de Conjuntos. Superando con creces a los diagramas de Venn (para los que la representación de cuatro conjuntos resulta atrabiliaria, y para cinco es prácticamente inviable). Con independencia de la imposibilidad de representarlos en Braille.

— Álgebra de Sucesos y Teoría de la Probabilidad.

— Análisis y manipulación de Funciones Lógicas de varias variables.

Al intentar una versión Braille, conviene distinguir dos momentos didácticos:

REPRESENTACIÓN BRAILLE DE *MAPAS/DIAGRAMAS DE KARNAUGH*

Criterios de simplificación y configuración

Fase de introducción —didáctica— (ejemplo: tabla 5-18).

Para resaltar que se trata de *regiones del plano*, parece aconsejable, en un primer momento, *"dibujar la cuadrícula"*; con las necesarias previsiones de espacio en *filas* y *columnas*, que determinen claramente dichas *regiones* o *casillas* vacías, prestas a ser marcadas por algún signo fácil de localizar.

1º Trazado de líneas.—Se emplean los mismos *caracteres-trazo* para la representación tanto de las líneas delimitadoras del *referente* como de cada *clase*. (En general: ver tabla 5-17)

2º La separación entre las *líneas horizontales* a trazar (definidoras de *filas*) será —como mínimo— de *una línea braille*.

3º La separación entre las *líneas verticales* a trazar (definidoras de *columnas*) será —como mínimo— de **dos columnas braille.**

4º Notación de *variables lógicas*.—Ya sean mayúsculas o minúsculas, se sitúan en la *región exterior*, como *cabeceras* o *pies* de las correspondientes *columnas* o *filas*.

5º Marcas.—Mediante alguno de los signos ⠛ (puntos 1245), ⠶ (puntos 2356) o ⠿ (puntos 123456)); que permite un fácil reconocimiento y generación de imágenes interiores (ver tabla 5-17).

Fase de trabajo rutinario (ejemplo: tabla 5-19).

1º Se suprimen las *líneas de definición*, tanto del *referente* —excepto que se aplique la Opción de 3º indicada más abajo— como de las *clases*.

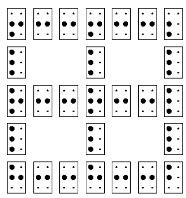
2º Emplazamiento de los indicadores de *variables lógicas* (nomenclatura de *clases* o *propiedades* intervinientes); que delimitarán la región destinada a *referente*. Para las *variables* con *clase definida como fila* se destina una *línea*; para las *definidas como columna*, dos *columnas Braille*.

3º (Opcional). Trazado de límites del *marco del referente*. Mediante signos análogos a los recogidos en la tabla 5-17.

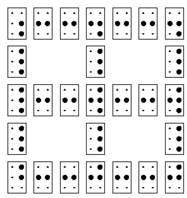
4º (Opcional). Marcado general de los lugares correspondientes a *subclases elementales*, mediante *signos de un único punto* (⠂, punto 2; ⠐, punto 5; ⠄, punto 3 o ⠠, punto 6) (ver ejemplo, tabla 5-19).

5º Emplazamiento de *marcas específicas* definidoras/definidas por la *operación entre clases* o *punción lógica* a representar, mediante los signos ⠛ —puntos 1245—, ⠶ —puntos 2356— o ⠿ —puntos 123456— (ver tabla 5-17)

Tabla 5-17. Signos Braille para el trazado de Mapas-diagrama de Karnaugh

<table>
<tr><td colspan="2">Cuadro-marco (o referente)</td></tr>
<tr><td>Modelo A</td><td>Modelo B</td></tr>
<tr><td>

235, 25, 235, 25, 23
123, 0, 123, 0, 123
1235, 25, 1235, 25, 123
123, 0, 123, 0, 123
125, 25, 125, 25, 12

códigos</td><td>

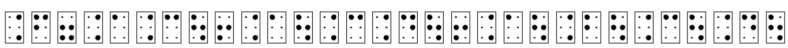
56, 25, 256, 25, 256
456, 0, 456, 0, 456
456, 25, 2456, 25, 2456
456, 0, 456, 0, 456
45, 25, 245, 25, 245

códigos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Marcas de casilla (o de subclases elementales)</td></tr>
<tr><td colspan="2">  </td></tr>
<tr><td colspan="2">códigos: 1245 2356 123456</td></tr>
</table>

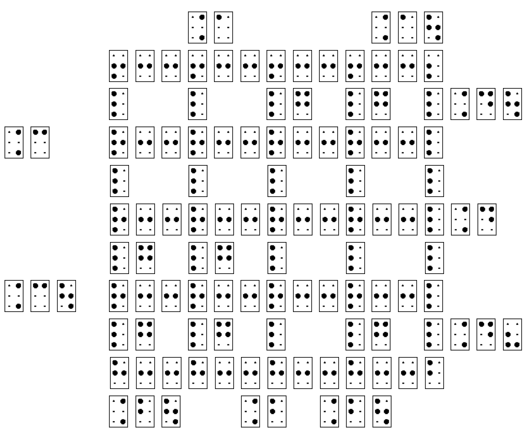
Tabla 5-18. Mapa/Diagrama de Karnaugh para una función lógica

$$F = AC' + A'CD' + A'B'C'D'$$

	A		A′		
C			+	+	D′
					D
C′	+	+			
	+	+		+	D′
	B′	B		B′	



Modelo A



Modelo B

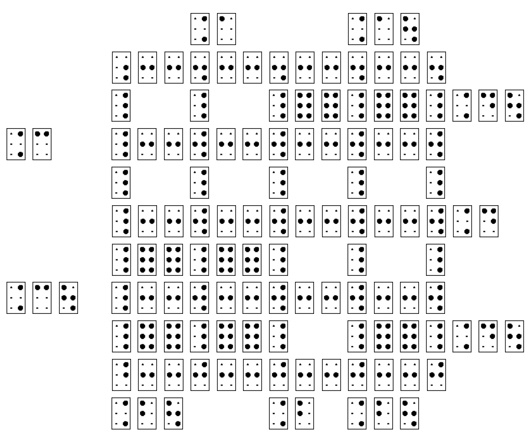
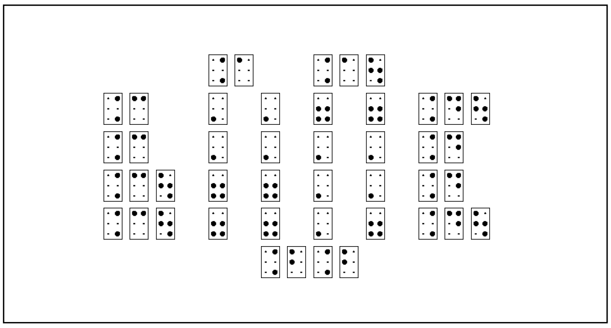


Tabla 5-19. Mapas/Diagrama de Karnaugh para una función lógica
Versión Braille simplificada



En la “fase de introducción didáctica”, los criterios/recomendaciones 2º y 3º aseguran la posibilidad de incluir a posteriori un signo o marca en cada casilla resultante, y de ser localizado a posteriori sin dificultad.

En la “fase de trabajo rutinario”, la “supresión de líneas” indicada en el criterio/recomendación 1º, reduce notablemente tanto el tiempo y esfuerzo de realización (en especial, para los trazos verticales, ángulos y puntos de ramificación) como la exploración/análisis ulterior y generación de imágenes interiores.

La “reserva de líneas” señalada en el criterio/recomendación 2º es, sin duda, la parte más delicada del proceso, por cuanto, antes de iniciar el trazado del diagrama, deben preverse cuántas y cuáles son las variables intervinientes, y decidirse su condición de columnas o filas y de cabeceras o pies. De hecho, equivale a un diseño global del marco/escenario que comprenderá el mapa final. Los “puntos denunciadores de casillas”, recomendados como opcionales en el criterio/recomendación 4º, aligeran este cálculo de espacios a reservar.

En alguna forma, el marcado de los puntos localizadores de casillas (criterio 4º) sustituyen el “dibujo de casillas” de la “fase de introducción” certifican la adecuación del diagrama-marco y correcto emplazamiento de las notaciones de variables lógicas. Asimismo, facilitarán más tarde el emplazamiento de marcas específicas y generación de imágenes interiores. Deben tenerse en cuenta las indicaciones de líneas y columnas del criterio 2º).

5.3. **REPRESENTACIONES CARTESIANAS O *MEDIANTE COORDENADAS***

Consideramos una *representación o gráfica cartesiana* (bidimensional) como comprendida por:

— ***Un sistema de referencia.*** Integrado por *un punto* (*origen*) y *dos vectores linealmente independientes* (no colineales) —que formen *base*—; o por *dos rectas graduadas (numeradas) secantes en el 0 —ejes coordenados*—; vectores o rectas, de ordinario, perpendiculares.

— ***Una regla operativa,*** por la que *cada punto* se corresponde biunívocamente con *un par de números reales* (en particular: naturales, enteros, racionales). Tal *regla* implica un *orden* en los *vectores de la base* o en los *ejes coordenados*, que se refleja en el correspondiente *par ordenado de números reales*.

Esta regla puede ser de tipo algebraico-analítico: *coordenadas del vector posición del punto respecto de los vectores (base) del "sistema de referencia"*. O geométrico: números reales definidos (representados) por las *intersecciones con cada "eje* de la *paralela al otro eje* trazada por dicho *punto*; si los *ejes* son perpendiculares, en lugar de *paralela al otro eje* puede hablarse de *perpendicular al eje*.

Con este artificio, una función o correspondencia de R en R —dada por una *tabla de valores* (conjunto finito de pares ordenados) o una fórmula algebraica— aparece como *una colección —finita o infinita— de puntos*, que se denomina *gráfica de la función*.

Fijado un *sistema de referencia*, y salvo *multiplicidad* (coincidencia), existe biunivocidad entre *correspondencias/funciones reales de variable real* y *representaciones cartesianas*: una función queda definida por su gráfica, y toda función determina una gráfica y sólo una.

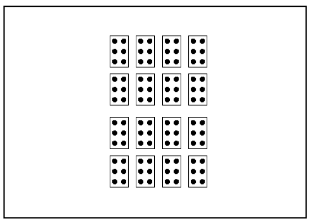
Esta última afirmación, además de establecer un puente entre formas algebraicas (simbólicas) y geométricas, permite expresar en lenguaje gráfico-geométrico prácticamente todas las propiedades funcionales, tanto en el *dominio accesible* (representación inmediata), como fuera de esos límites. De suma importancia a efectos didácticos: puede decirse que es en este campo donde más destacan los valores didácticos a que nos referíamos en el comienzo de este Capítulo.

En rigor, toda *representación cartesiana es finita*, dejando fuera de su alcance *los valores que exceden el dominio de representación*. Pero se entiende que *es representativa*, en el sentido de que *"comporta elementos gráficos suficientes para inferir el comportamiento global de la función"*.

A la hora de intentar plasmar en relieve una gráfica cartesiana tropezamos con tres inconvenientes graves:

a) Irregularidad de la distribución de puntos Braille. Ya que no se trata de una *matriz cuadrada* o *red de nudos equidistantes*, sino de una yuxtaposición de *matrices rectangulares*, que, si bien son iguales entre sí, los puntos que contienen forman por adición un conjunto de irremediable distinta separación tanto horizontal como vertical.

Tabla 5-20. Matriz de puntos Braille



b) Imposibilidad de marcar *puntos intermedios*. O, lo que es lo mismo: rigidez de las coordenadas de los *puntos Braille posibles*. Lo que obliga a *proceder por aproximación* en la correspondencia *coordenadas-punto*, si no quiere dejarse sin representar aquellos *puntos* cuyas coordenadas no coincidan exactamente con los *puntos Braille posibles*.

Inconveniente que también sobreviene en los productos visuales de impresoras y aun en las *salidas por pantalla* de la totalidad de los *programas gráficos*; aunque su alta densidad de puntos respecto del Braille producido por la máquina Perkins denuncia en ésta una discontinuidad que pasa desapercibida en aquéllos.

Puede obtenerse una cierta continuidad en el trazado de *rectas verticales*, acudiendo al artificio del *interlineado manual*, sirviéndose del *rodillo para sujeción del papel*. Pero sin garantías de obtener puntos equidistantes.

c) Exclusiva posibilidad de trazado para *rectas horizontales y verticales*; y esto, con la limitación de la *discontinuidad* e *irregularidad* en una dirección respecto de la otra. Queda vedado, por consiguiente, el trazado de rectas oblicuas y curvas de todo tipo, salvo aproximaciones muy groseras.

Así pues, la máquina Perkins —y la práctica totalidad de *impresoras Braille* hoy disponibles— sólo permite el *dibujo* de gráficas cartesianas en las que intervengan exclusivamente puntos aislados y segmentos horizontales y verticales; y, para ello, con pérdidas de continuidad —homogeneidad— y una cierta desproporción entre las unidades de *abscisas* y *ordenadas*.

Pero estas limitaciones no impiden absolutamente su empleo fructífero en trabajos dentro y fuera del aula, en especial si se desea que los *productos* puedan ser conservados con fines de cálculo, estudio o repaso ulterior: algo que apenas se consigue con la *lámina de caucho*, que sería el útil adecuado en el tratamiento de gráficas generales. Sin olvidar que la Perkins también supera a este recurso didáctico —específico de la educación especial de ciegos— en la posibilidad de incorporar nomenclaturas y expresiones, y una cierta posibilidad de cálculo mediante *"recuento de los signos empleados"*.

Consideraremos:

— el *Taxiplano*, o simple *matriz de puntos de coordenadas cartesianas*;

— las *funciones en escalera*, o *constantes a trozos*;

— los *histogramas* o *diagramas de bloques, columnas o barras*;

— los *itinerarios ortogonales*. Se asimilan a los *grafos elementales*, que se tratarán en 5.5.1

5.3.1. MATRIZ FUNDAMENTAL DE COORDENADAS CARTESIANAS

De ordinario, las gráficas cartesianas suelen representarse sobre un fondo cuadriculado (o de *papel milimetrado*, *rayado universal*, etc.), que facilita la localización de puntos mediante su abscisa y ordenada, o la determinación de éstas. Cuadrícula o *matriz fundamental* que tiene numerosos usos didácticos:

— realización de ejercicios en la fase introductoria, tales como *localizar puntos* y *determinar coordenadas*;

— campo para ejemplificaciones y ejercicios en los planos vectorial, afín y métrico;

— ídem de transformaciones métricas sencillas y su tratamiento analítico;

— referencia que facilite el trazado de gráficas elementales.

Ya se ha señalado que lo más adecuado es que este tipo de actividades se desarrolle en el aula mediante el empleo de la *lámina de caucho*, introduciendo paulatinamente conceptos y elementos a considerar. Suelen emplearse, además, hojas de papel previamente impresas en las que figuran los *ejes cartesianos* y los *puntos de coordenadas enteras*. Pero pudiera ocurrir que no se dispusiera de este material, o que quisiera iniciarse al alumno a producirlo por sí mismo: de hecho, será una parte de las actividades representativas a las que nos referimos en los Apartados inmediatos.

Se ha repetido hasta la saciedad la conveniencia de intentar reducir al máximo los elementos táctiles de la representación, a fin de facilitar la exploración háptica y producción de imágenes interiores, y economizar esfuerzo y tiempo de realización física. Debe desecharse, por consiguiente, el trazado de una cuadrícula completa; incluso de la incorporación de referencias numéricas, por cuanto que éstas pueden suplirse por simples recuentos de marcas, en su caso.

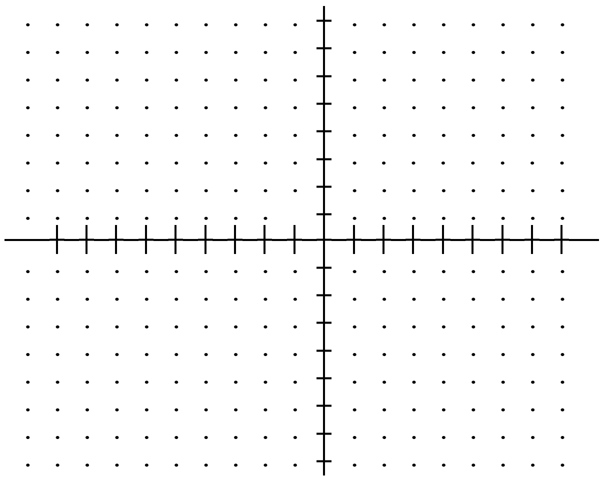
La respuesta de adecuación viene dada por el *"plano punteado con ejes coordenados"* mencionado más arriba. Concediendo:

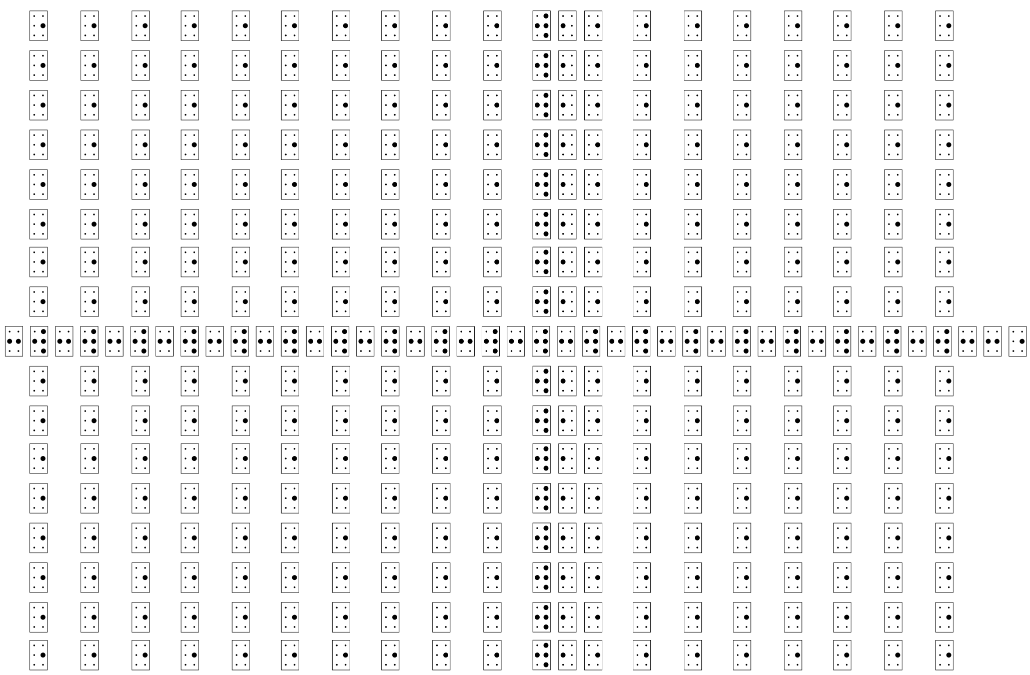
— La discontinuidad en el trazado de los *ejes*; que puede paliarse, en el caso del trazado vertical, recurriendo al paso manual interlíneas.

— Diferente distancia vertical y horizontal entre puntos (diferente unidad para abscisas y ordenadas); que se aminora aplicando la proporción **una línea < = > dos columnas.**

— Que la distancia entre puntos no sea igual a 1cm, ni a múltiplo sencillo suyo.

Tabla 5-21. Plano cuadriculado (o taxiplano) (Versión máquina Perkins)





Dada las escasas dimensiones posibles de la *matriz*, se omite la notación numérica en los *ejes*. La abscisa u ordenada se calcula con facilidad por simple recuento de tramos.

REPRESENTACIÓN BRAILLE DEL *PLANO PUNTEADO* O *MATRIZ FUNDAMENTAL DE PUNTOS COORDENADOS* (*TAXIPLANO*)

Criterios de simplificación y configuración

1ºA) Para el trazado del *eje vertical* (en principio, *eje de ordenadas*) se emplea el signo ⠸ (puntos 456) o sus homólogos en los distintos modelos propuestos (ver tabla 5-22).

1ºB) (Opcional). Si se desea que queden marcadas las unidades en dicho *eje vertical* (véase: *de ordenadas*), se emplea el signo compuesto ⠺⠂, (formado por los puntos 2456 y el punto 2 (ver, para otros modelos: tabla 5-22).

1ºC) (Opcional). Si se desea una continuidad en los *puntos de la representación* del *eje vertical* (*de ordenadas*), se traza el signo ⠸ (puntos 456; ídem, tabla 5-22) entre líneas, sirviéndose del "paso incompleto de línea", mediante giro manual del "rodillo de sujeción del papel".

2º Los *puntos de coordenadas enteras* o *nudos de la matriz fundamental* —no pertenecientes a los ejes— se indican mediante el signo ⠐ (formado por el único punto 5;ver opciones en tabla 5-22).

3ºA) Para el trazado del *eje horizontal* (en principio, *eje de abscisas*) se emplea el signo ⠒ (puntos 25); excepción hecha de:

3ºB) La intersección con el *eje vertical* (*de ordenadas*), para la que se emplea el signo ⠺ (puntos 2456; ídem tabla 5-22).

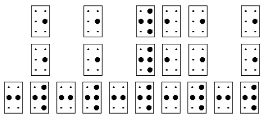
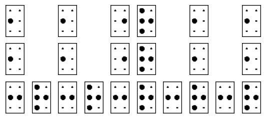
3ºC) (Opcional). Si se desea que queden marcadas las unidades en dicho *eje horizontal* (*de abscisas*), se emplea el signo ⠺ (puntos 2456; ídem) alternando con el signo *lineal* ⠒ (puntos 25; ídem).

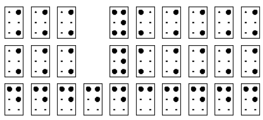
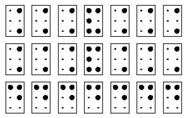
4º) (Opcional). El *trazado de ejes* —en especial, el *vertical* (*de ordenadas*)— y el *marcado de puntos aislados* puede hacerse siguiendo el orden de líneas en la máquina Perkins, poniendo especial cuidado en la *correspondencia de columna*.

Es decir: no es imprescindible seguir un orden rígido (primero *ejes* y después *puntos aislados*, *"columna a columna"*, etc.); aunque esto podría favorecer también la automatización mecánica de las pulsaciones.

Los signos recomendados no son exclusivos: pueden emplearse otros que conserven la posición y distancias relativas, para dar una representación análoga. Tomando como *signo-base* el *indicador de punto o nudo*, tendríamos:

Tabla 5-22. Signos Braille para representaciones del plano cartesiano (Malla de puntos en nudos de red, o taxiplano)

MODELO a		MODELO b	
5,0,2456,2,5,		0,5,1235,0,2	
	5,5,0 2,5,0		0,2,0 0,2,0
25,2456,25,2456,25		25,1235,25,1235,25	

MODELO c		MODELO d	
13,0,13456,13,..		46,12346,46	
	13,13 13,13		46,46 46,46
145,145,14,145,145..		145,145,145,145	

La elección de uno u otro modelo estará en función de la destreza adquirida en simultanear la escritura de puntos con una mano, y el control por la otra, que suele ser la técnica habitual.

5.3.2. FUNCIONES *EN ESCALERA*

También reciben el nombre de *funciones constantes a trozos* o *constantes por intervalos*.

El nombre describe bien a las claras cuál es su gráfica. El ejemplo más sencillo es la función **int(x)** (*parte entera de x*), que a cada número real le hace corresponder su parte entera, como su nombre indica:

Tabla 5-23. Representación en braille de una función en escalera o constante a trozos (I)

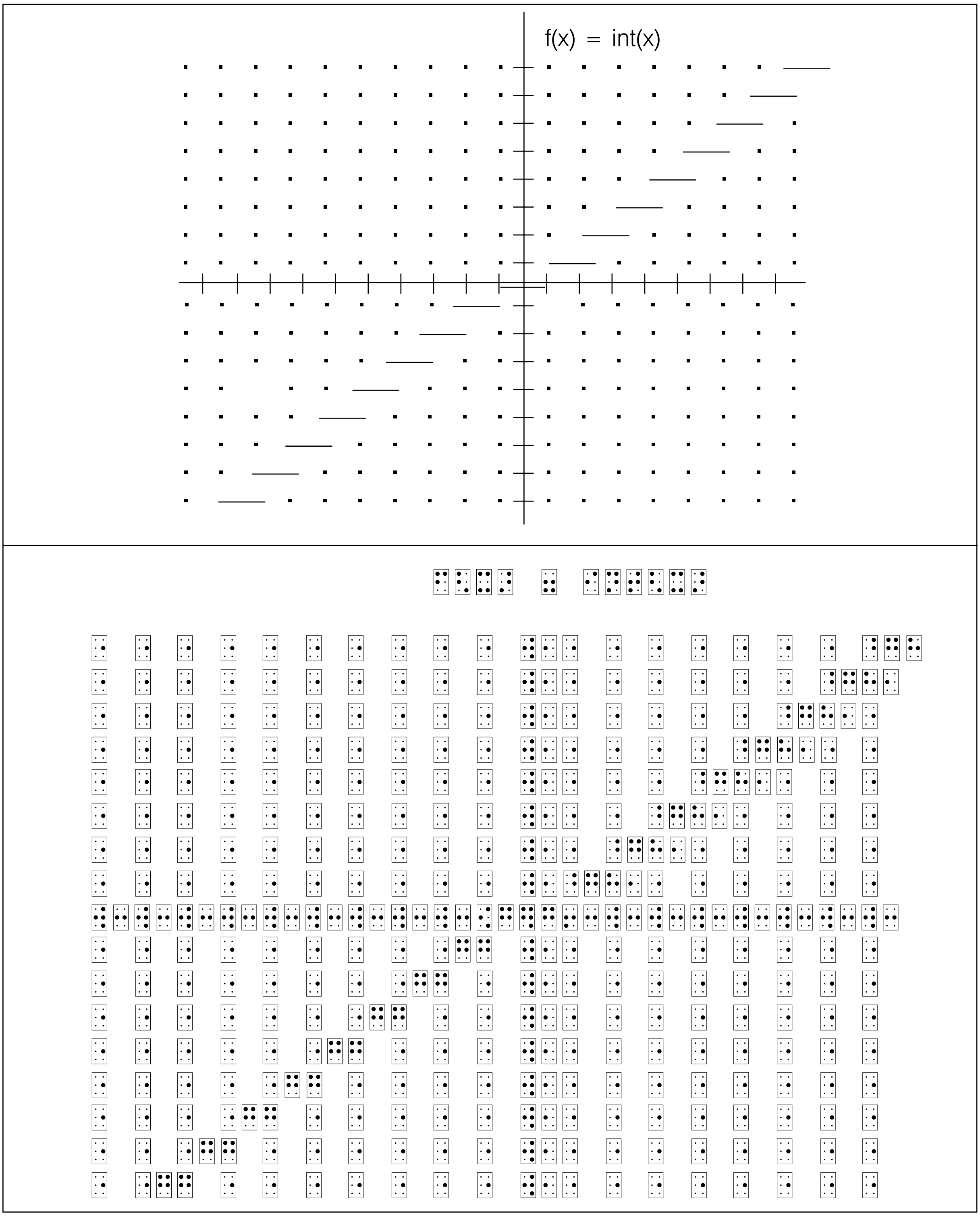


Tabla 5-24. Representación en braille de una función en escalera (II)

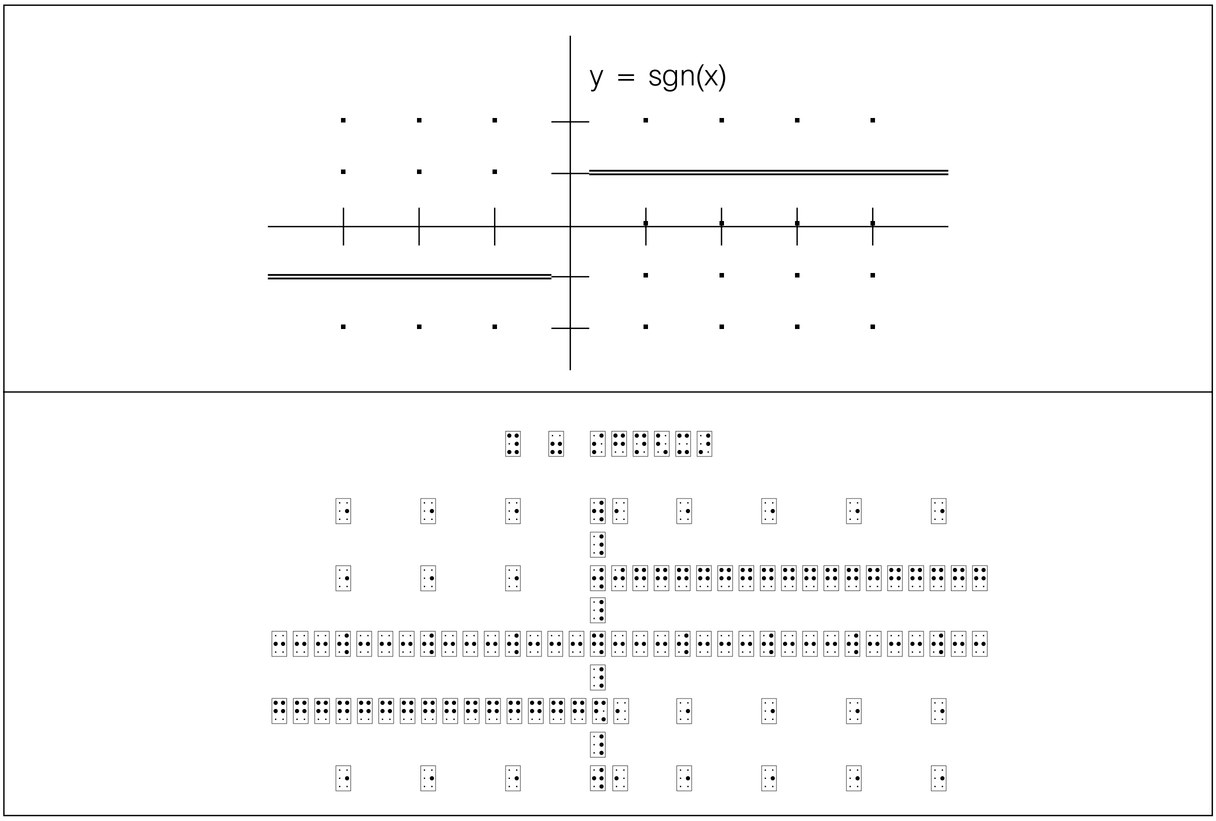
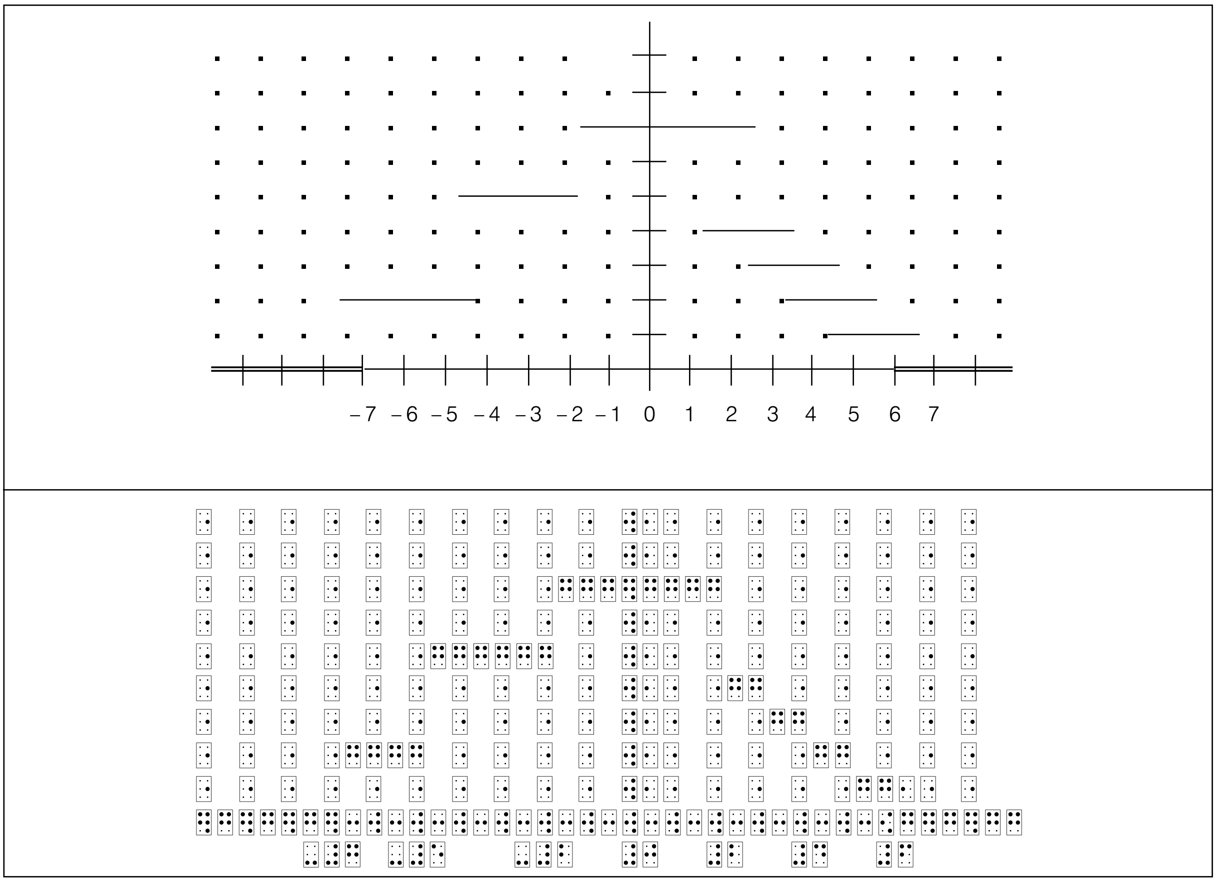


Tabla 5-25. Representación en braille de una función en escalera (III)



Las discontinuidades de este tipo de funciones no tienen por qué corresponderse con valores enteros, como puede observarse en los dos últimos ejemplos.

Al intentar reproducir estas gráficas en Braille tropezamos con las consabidas limitaciones, que se hacen más notorias. En particular:

1ª Escasas dimensiones del *campo de representabilidad*; que, para la página Braille, tendría máximos de (– 10, 10) × (– 15, 15) (se supone la relación **una línea < = > dos caracteres o columnas).**

Las soluciones son semejantes en Braille a las que se adoptarían *en tinta* —de ser necesarias—: modificar el *sistema de referencia* o las *escalas axiales*.

a) Mediante **traslación del sistema de referencia,** que situaría el origen en un punto *próximo* a la porción de gráfica a *visualizar*;

b) Mediante **compresión/dilatación axial,** o empleo de distinta métrica para *abscisas* y *ordenadas*; aunque pueden surgir *conflictos entre efectos mutuos* si también se aplica para resolver dificultades en el caso contemplado más abajo (2c);

c) Proceder a una **rotación de ejes** —o, lo que es lo mismo: *"dibujar en apaisado"*—, obteniéndose así un *campo de representabilidad* de (– 15, 15) × (– 10, 10).

d) Aplicación simultánea de varias de las soluciones anteriores. Algo que es muy frecuente en la presentación de distribuciones estadísticas, recurriendo conjuntamente a la *traslación del sistema de referencia* y *modificación de las escalas axiales*:

El hecho de adoptar para la realización una disposición en *rotación de ejes* no implica que la exploración y estudio posteriores no se haga en la disposición adecuada. Aunque algunos de los elementos —referencias numéricas, en su caso— queden traspuestas: tanto como la fidelidad de la representación a obtener importa la *imagen interior* que con ella se genere.

Conviene resaltar que la *rotación de ejes* dificulta gravemente la confección de la gráfica; en especial, el emplazamiento y trazado de los *segmentos horizontales* (se tornarían *verticales*) que la configuran, por las exigencias de *conversión de coordenadas* y observancia de la *columnación*.

2ª Los únicos puntos accesibles son los que se corresponden exactamente con *medias unidades*, tanto en *abscisas* como en *ordenadas* (y éstas, según el signo de representación que se adopte).

Para otros valores, puede acudirse a tres soluciones:

a) Tomar el *valor por redondeo* a puntos accesibles, tal como se procede de ordinario en las representaciones *en tinta*.

b) Proceder *manualmente* en el desplazamiento de línea y aun de la cabeza impresora; con el dispendio de esfuerzo en la precisión y riesgo de error involuntario que esto conlleva.

c) Modificar las unidades en uno u otro eje, o en ambos; algo que es también habitual para las representaciones en tinta, haciéndolas accesibles y significativas; aunque suponga deformación o desplazamiento de la *gráfica estricta*.

Esta exposición de dificultades y posibles soluciones puede suscitar la impresión de que el trazado de una gráfica —aun tan simple como sería la correspondiente a una *función en escalera*— es una tarea compleja. Ciertamente lo es, comparada con una actividad *mecánica*; pero no debe olvidarse que cada una de las decisiones a adoptar son en sí mismas muy sencillas: un mínimo de práctica en el trazado de gráficas las *automatiza* rápidamente, anticipando respuestas que evitan reelaboraciones, asemejándose al empleo de lo que en un “programa de gráficos” sería el uso de los *zooms* o el *desplazamiento del origen*.

Una *correcta* y rápida representación Braille —dentro de las limitaciones expuestas— implicaría, pues, un elemental análisis matemático de la situación, combinado con unos pocos cálculos irrelevantes.

Transformaciones exigidas por la representación Braille de funciones en escalera

Exigencia	Transformación
Coordenada/s alterada/s alejada/s del origen	Modificación del sistema de referencia por traslación
Opcional, a reservas del anterior	Diferente métrica en *abscisas* y *ordenadas*
Espacio insuficiente para *abscisas*	Permuta de ejes (rotación del diagrama)

REPRESENTACIÓN BRAILLE DE *FUNCIONES EN ESCALERA*

Criterios de simplificación y configuración

1º Determinar en *abscisas* y *ordenadas* el *campo de existencia* de la gráfica o *porción a representar*.

2º En función de estos valores en *abscisas* y *ordenadas*, y de los *límites de representabilidad de la máquina Braille*, decidir:

a) unidades a adoptar para cada coordenada; tomando como base: **“una línea < = > dos columnas”;**

b) decisión sobre el trazado *en horizontal* o *en vertical*;

c) emplazamiento del *origen de coordenadas*; o, lo que es lo mismo: fila y columna con que deberán corresponderse los *ejes*;

d) Conveniencia de incluir *indicaciones numéricas* de valores en los *ejes*, conforme a los Criterios de transformación según exigencias representativas, sugeridos en cuadro *ut supra*.

3º Trazado de los *ejes*, conforme a las indicaciones 1ºB y 3ºC de 5.3.1, aplicadas ahora de forma ineludible, y sirviéndose de alguno de los Modelos propuestos para signos en 5.3.1 (ver tabla 5-22).

4º (Opcional). Marcado de los *puntos de la matriz fundamental* o *nudos de la red*, conforme a los signos elegidos en 3º.

5º Cálculo y trazado de los segmentos integrantes de la gráfica; empleando, preferentemente, signos distintos de los utilizados para los *ejes* (ver 5.1, tabla 1-8), y prestando especial atención a los *“puntos frontera”*.

Llegado este paso 5°, y para valores que no se ajusten a *puntos directamente accesibles*, deberán aplicarse técnicas de *redondeo* o de *ajuste manual* de los elementos de la máquina. De no ser satisfactorios estos procedimientos, debería reiniciarse todo el proceso.

5.3.3. HISTOGRAMAS

Corresponde esta denominación a un amplio grupo de representaciones entre las cuales se encuentran, como más frecuentes, los *diagramas de bloques, columnas o barras,* y los *pictogramas*. Tienen como característica la expresión de medidas de magnitudes mediante superficies emplazadas en un sistema de coordenadas, que suele reducirse a tan sólo el *primer cuadrante*.

A menudo incorporan notaciones numéricas, expresiones literarias, iconos, etc., en la pretensión de hacer más explícita o expresiva la representación y facilitar su interpretación. Pero muchos de estos elementos adicionales tienen carácter redundante, o pueden sustituirse mediante sencillas explicaciones complementarias.

Las limitaciones del Braille restringen, en principio, su posibilidad de transcripción a los *diagramas de bloques*, que tan sólo se sirven de *trazos horizontales y verticales*.

Gráficamente, un *diagrama de bloques* puede asimilarse a la gráfica de una *función en escalera* en la que:

a) Se han trazado los *segmentos verticales* comprendidos entre el *eje de abscisas* y *los extremos de los segmentos horizontales definidores de la gráfica*; resultando así *rectángulos* o *bloques* **adosados.**

En conjunto, predominan los *trazos verticales* sobre los *horizontales*. La mayor facilidad de los segundos para ser representados en Braille determina la primera sugerencia de transcripción: *rotación de ejes*.

b) El interior de cada *bloque* o *rectángulo* se halla *coloreado* o *marcado*, para mejor resaltar la superficie a considerar y destacarla del *fondo de la gráfica*.

Pero no nos sentimos movidos a plasmar esta diferencia en relieve, ya que si el color (o tonos de grises) son el estímulo esencial y propio de la vista, el del tacto es el *contorno* (las *barreras de separación de superficies*, más que su *diferencias de tacto o rugosidad*). Las líneas trazadas delimitarán perfectamente las superficies; economizaremos así tiempo y energías al confeccionar el diagrama, y estímulos táctiles al explorarlo.

Cabe una modificación sumamente interesante: *comprimir los rectángulos*, hasta reducirlos a *trazos contiguos*, convirtiéndolos en verdaderos *diagramas de barras*; empleando alguno de los signos propuestos en 5.1 para *resaltar segmentos en la recta real* (ver tabla 5-6). Aunque se rompa la *contigüidad entre bloques*, se simplifica al extremo la confección, y se facilitan la exploración y la nitidez de la imagen interior.

Es más: mediante la combinación de signos, puede facilitarse el recuento de signos elementales, que determinan la *altura de cada barra, columna o bloque.*

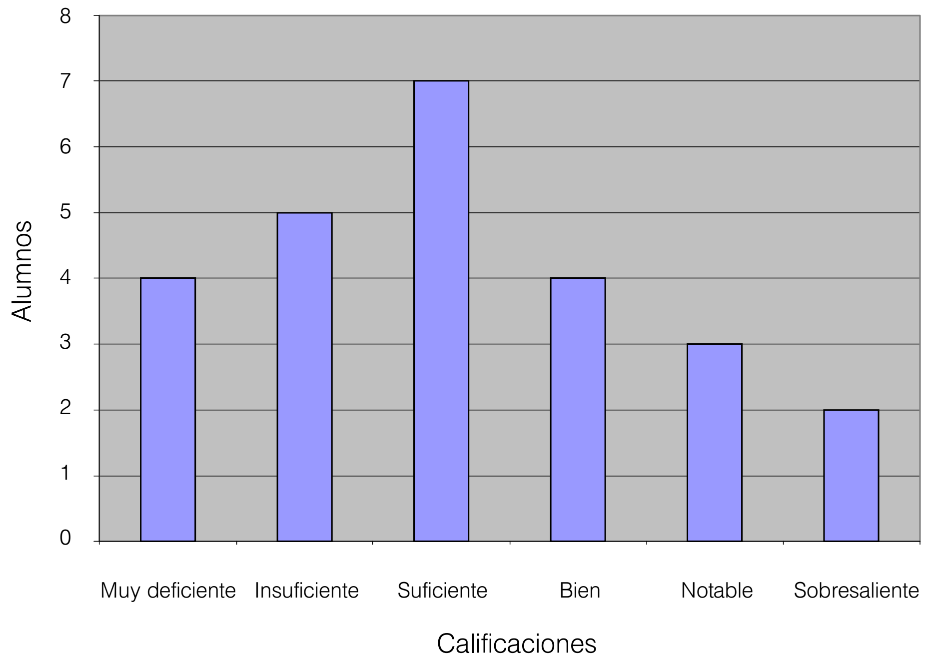
c) De mantenerse la configuración claramente *rectangular* o *en bloques*, el interior de cada uno de éstos puede contener algún tipo de información, que se corresponde cuantitativamente con la superficie de aquél, y cualitativamente con la unidad (explícita o implícita) de la magnitud considerada.

Si todos los *bloques* o *rectángulos* tienen *igual base*, su superficie es, pues, proporcional a su *altura* (ordenada del segmento que lo cierra superiormente). En este caso, la comparación de magnitudes/superficies se reduce a *"comparación de alturas"*; de lo contrario, debe procederse a una *"comparación estimativa de superficies"* o *"cálculos con las indicaciones numéricas"* a ellos referidas.

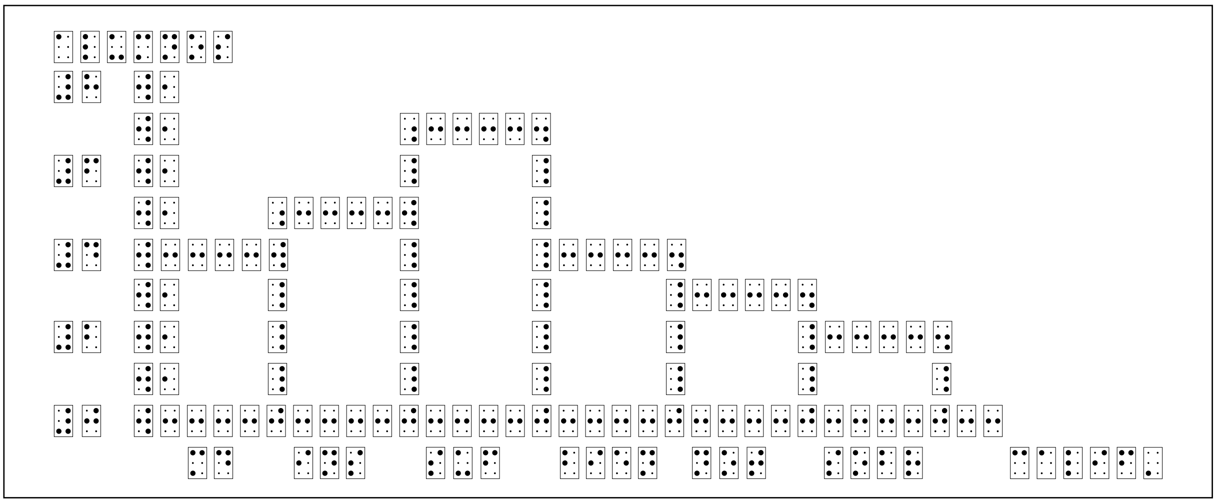
En Braille, podemos optar por:

— Tomar dos líneas —como mínimo— para el ancho de los *bloques* o *rectángulos*, y escribir en su interior la información deseada; lo que será asequible, al haber optado por la *representación rotada* (comparar resultados en tabla 5-26);

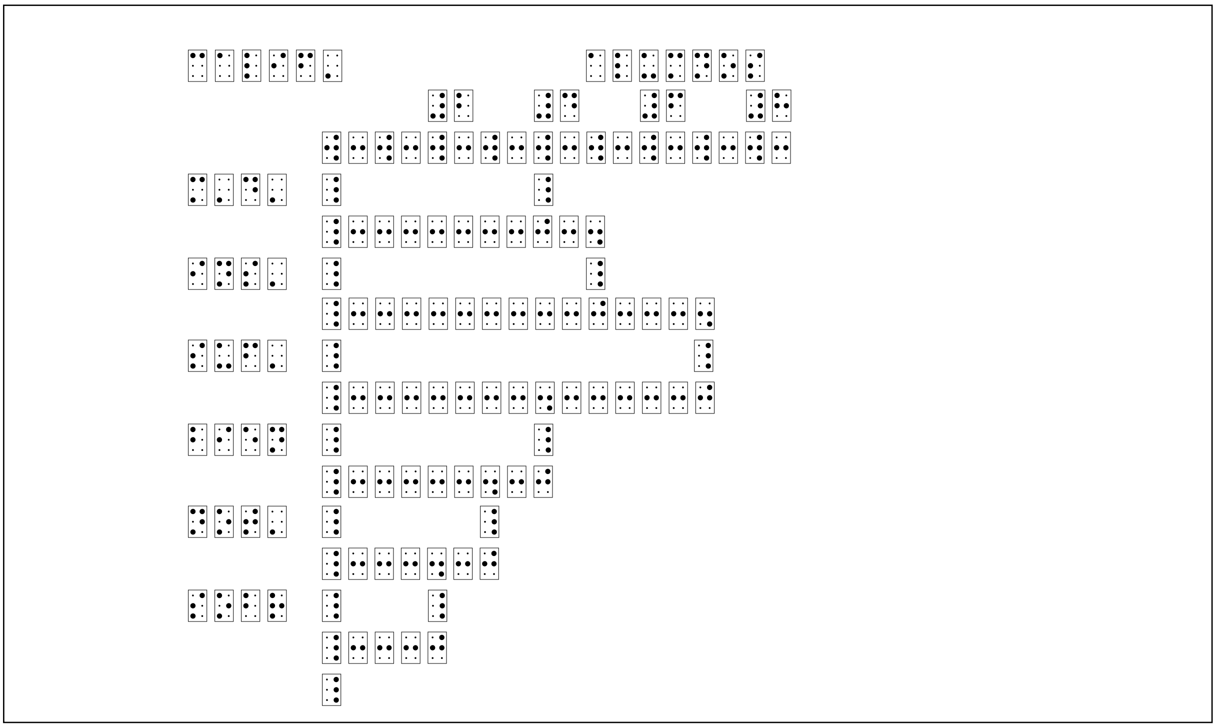
Tabla 5-26. Representación braille de un diagrama de bloques o columnas



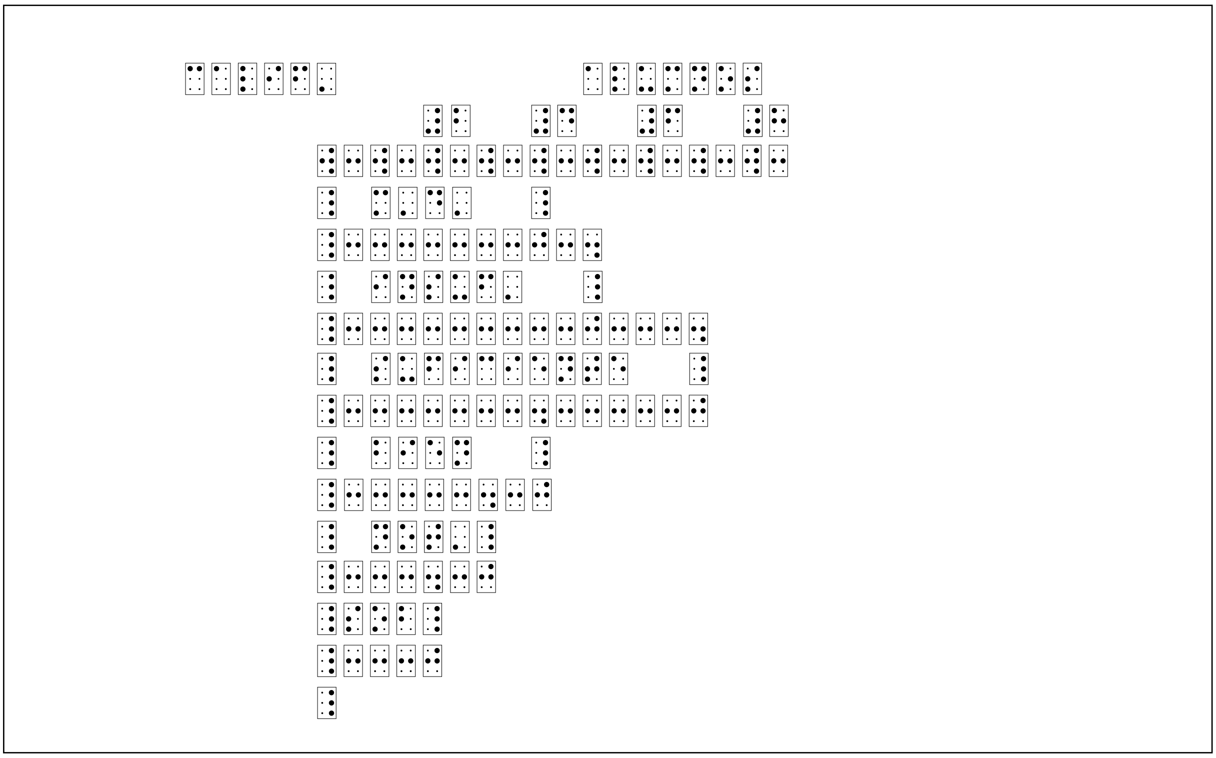
Versión en *formato horizontal*.



Versión en *formato vertical (rotado)*.
Modelo A: con *información exterior*.

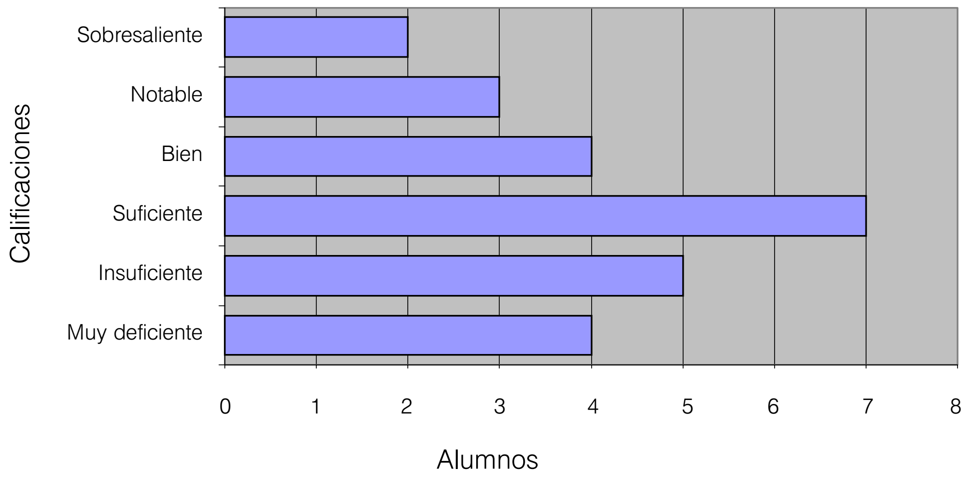


Versión en *formato vertical (rotado)*.
Modelo B: con *información interior*.

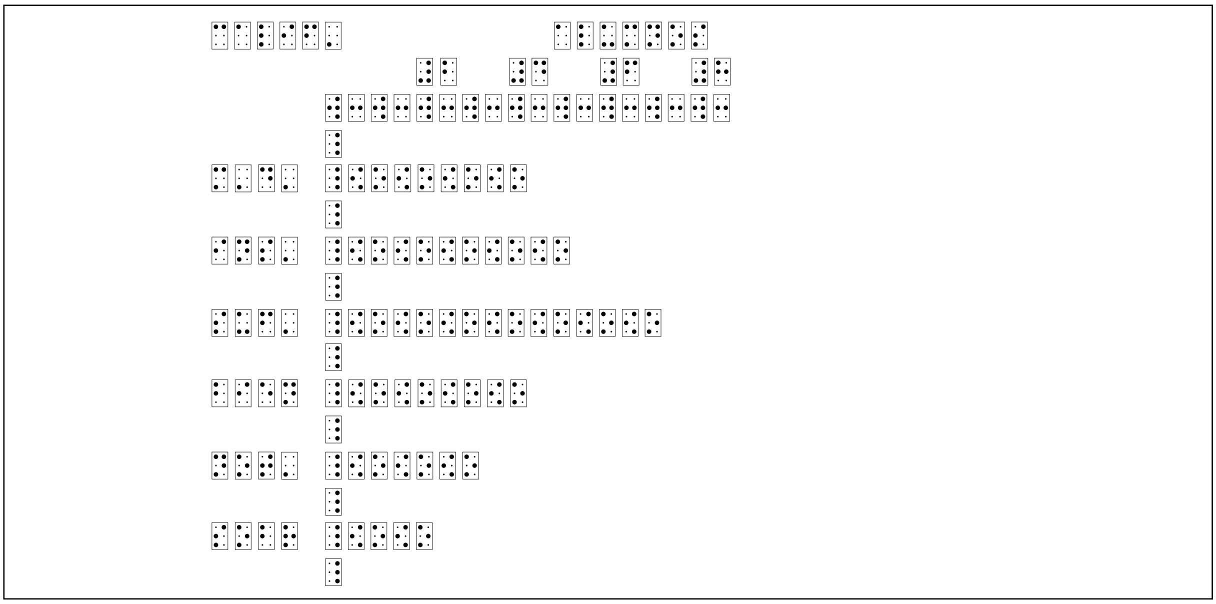


— En caso de reducir cada *bloque* a una *línea simple*, se extraería de aquél, emplazando tal información *a continuación suya* (tabla 5-27) o se recogería en *tabla aparte*.

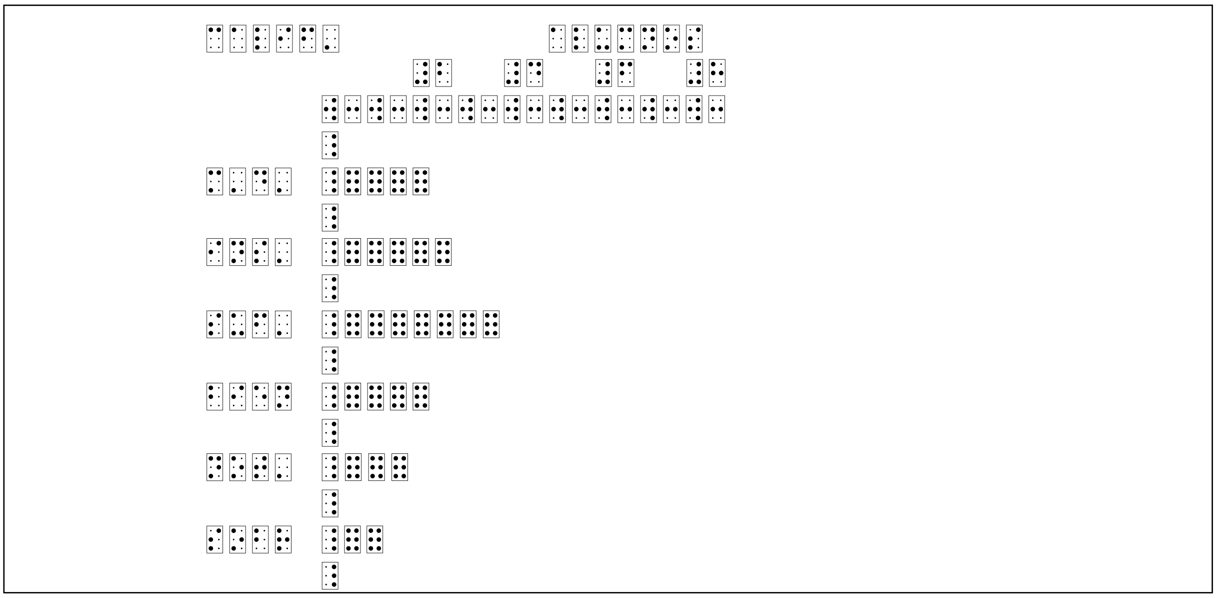
Tabla 5-27. Representación braille de un diagrama de barras



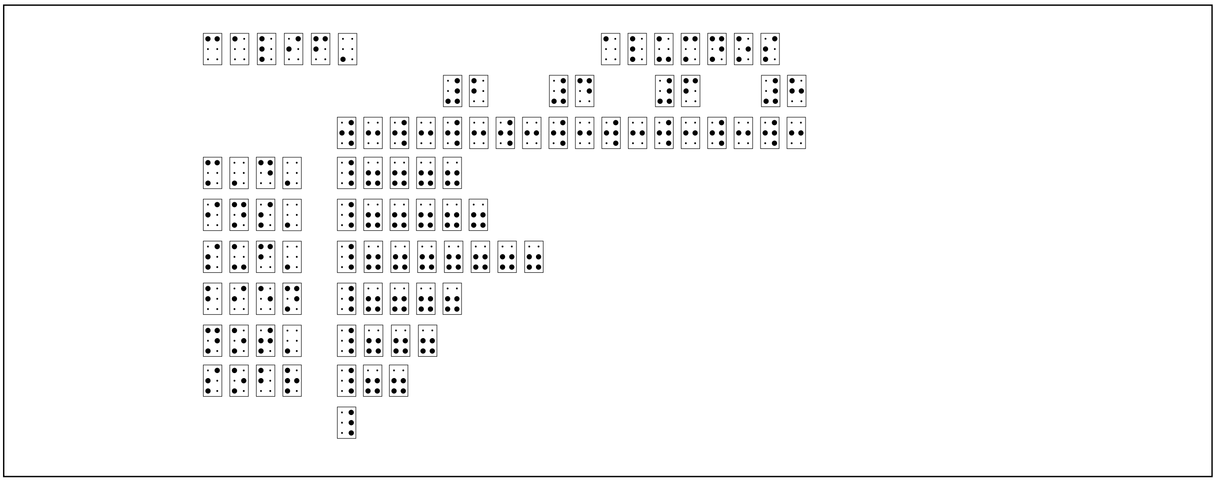
Modelo A



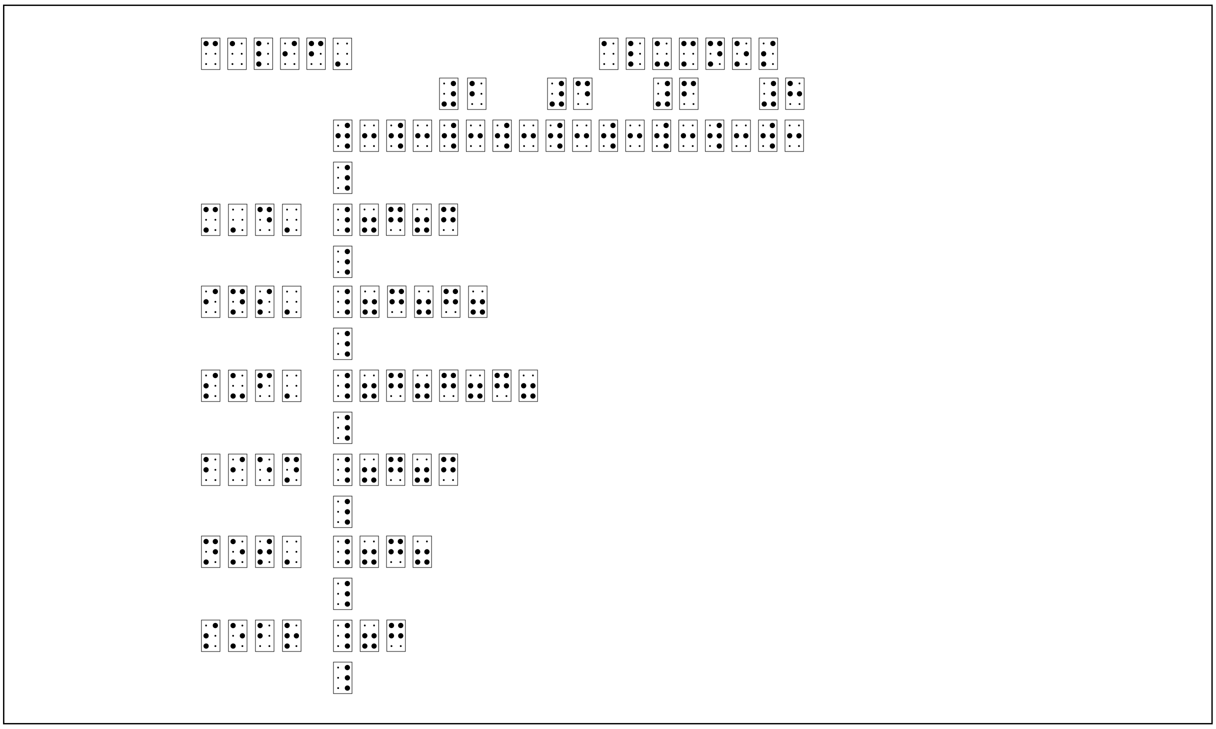
Modelo B



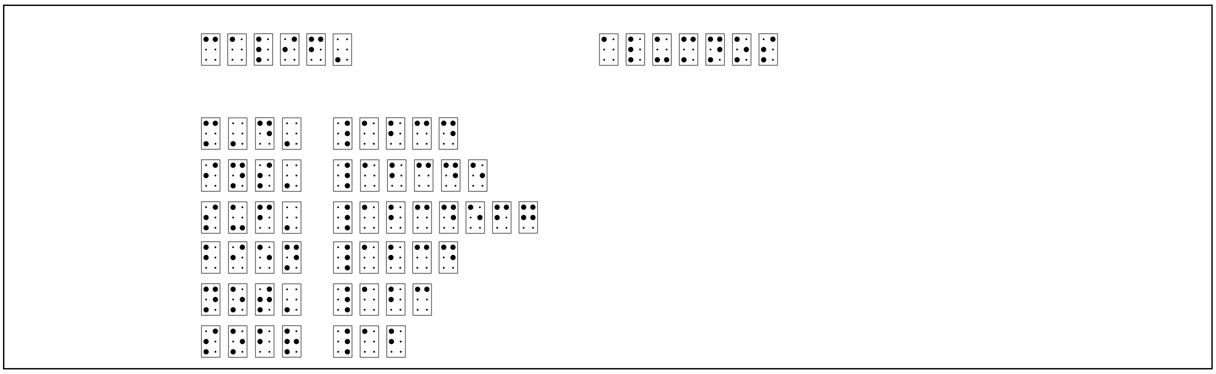
Modelo C



Modelo D



Modelo E



Compárese cómo los modelos A y D facilitan el recuento o cálculo de las *alturas* de las *barras* o *columnas*, y el modelo E presenta directamente el tamaño de cada una; fijada la *unidad*, puede suprimirse la *línea* o *eje de referencia*, tal como se ha hecho en E. No obstante, los modelos B y C favorecen —a nuestro juicio— la formación de la *imagen interior* del diagrama, por su mayor estimulación háptica, la primera, y sencillez y compacidad, la segunda.

d) Información adicional, en forma literal o icónica.

Aquélla que pudiera considerarse esencial o relevante —a efectos matemáticos— se traslada en Braille a *notas complementarias* (mediante los oportunos *signos de atención* o *llamadas*) o se incorporan pura y simplemente a la representación. Prefiriéndose la primera fórmula, por cuanto aligera el histograma de elementos que enturbien su exploración y representación interior.

Los *pictogramas*, que se sirven de figuras o *iconos* alusivos a las magnitudes representadas, pueden transformarse fácilmente en *diagramas de bloques* —representables, por tanto, en Braille— sin más que adjuntar a cada *barra* o *columna* una leyenda alusiva o explicativa: inserta en su interior o a guisa de *abscisa conceptual*.

REPRESENTACIÓN BRAILLE DE *HISTOGRAMAS*
(*DIAGRAMAS DE BLOQUES,COLUMNAS O BARRAS*)

Criterios de simplificación y configuración

1º Estudio del diagrama de referencia y decisiones-guía de representación:

a) Información contenida y selección de los aspectos a plasmar.

b) Dimensiones:

— dominio

— alturas de los *bloques* (mínima y máxima).

2º Determinación de:

a) Dimensiones de las unidad/es en *abscisas* y *ordenadas;* éstas, del *diagrama original*.

b) Tipo de representación a emplear para los *rectángulos* o *bloques* (rectángulo extenso, línea simple o trazo grueso y signos braille que los configuren, etc.).

c) Referencias e informaciones complementarias a conservar, lugar y forma de incorporarlas.

d) Equivalencia signo braille-unidad de altura.

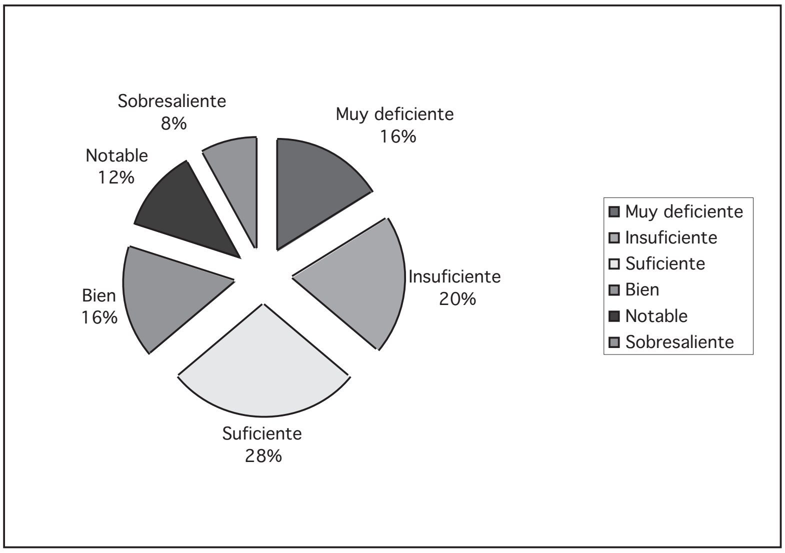
3º Trazado de los elementos de la representación, conforme a las decisiones adoptadas en 2º y los criterios/sugerencias de 5.3.1 y 5.3.2.

5.4. **DIAGRAMAS DE SECTORES CIRCULARES**

Se conoce como tal toda representación de *"una partición de un círculo en sectores"*. Gráficamente: un círculo con varios de sus radios.

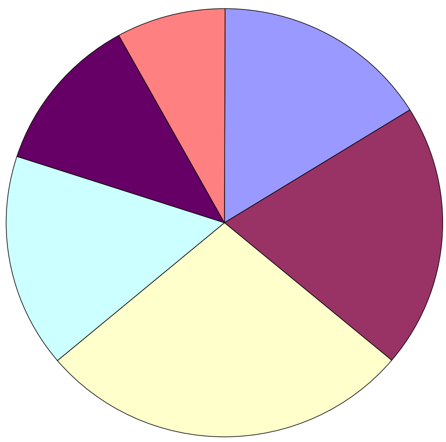
Pueden incluir expresiones numéricas, literarias o diferenciaciones gráficas entre sectores:

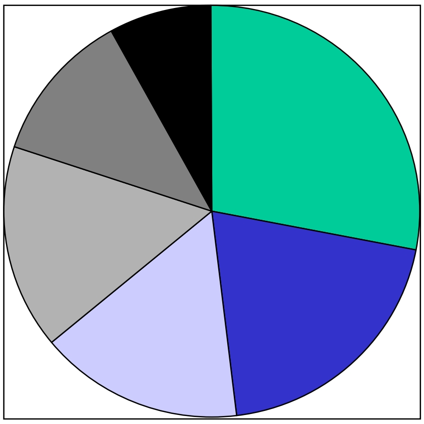
Muy deficiente	Insuficiente	Suficiente	Bien	Notable	Sobresaliente
4	5	7	4	3	2



Los *diagramas en sectores circulares* tienen su principal campo de aplicabilidad en la representación de distribuciones de población, situaciones estadísticas y de probabilidad, etc. En particular, estas últimas evocan un modelo estocástico sugerente: una "ruleta" cuyas probabilidades (amplitudes o áreas de los sectores) se corresponden con las del espacio de comportamientos elementales en el referente.

En sentido estrictamente matemático, *"no importan los atributos o información adicional adjunta a cada sector"* (*color* o *textura de fondo*, *información numérica* o *literaria*, etc.), como tampoco el emplazamiento de los diferentes sectores, ni su *ordenación mutua*: tan sólo su extensión. En este sentido, serían *isomorfos* el ejemplo de más arriba y los que siguen:





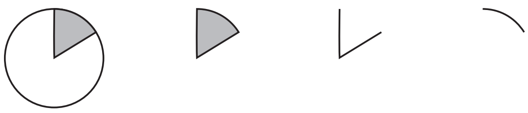
Es frecuente, no obstante, observar ciertos criterios, que parecen facilitar su evocación y análisis ulteriores:

— Los sectores representan magnitudes que corresponden a un orden determinado: a) por su valor numérico decreciente, o b) conforme a un cierto criterio conceptual.

— Los sectores se sitúan consecutivamente a partir del radio *vertical superior*, siguiendo el orden horario —giro negativo o dextrorsum—, conforme a este orden predeterminado.

La máquina Perkins no permite el trazado de círculos ni oblicuas. Sin embargo, un estudio somero del fundamento matemático de este tipo de representaciones nos permitirá elaborar un modelo coherente y posible en Braille: su transformación en *diagrama lineal*.

A fin de cuentas, este tipo de diagramas pretende expresar cuantitativamente la división de un todo o referente en partes excluyentes que se corresponden con un número finito de conceptos. Esta representación puede entenderse como la expresión de la superficie de cada sector o al ángulo que lo determina, debida a la equivalencia en un círculo (para un radio determinado) entre ángulo, arco y superficie del sector; en radianes:



Así pues, un *diagrama en sectores circulares* puede considerarse como un *isomorfismo lineal* entre el dominio de valores del referente a representar y el intervalo (0, 2π), que a una parte **n** del total **N** le hace corresponder el ángulo (sector):

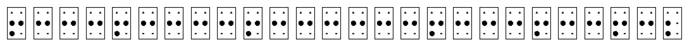
$$f(n) = 2\pi n \div N$$

Mas, por simple homotecia, el segmento (0, 2π) puede convertirse en cualquier otro: (0, N), por ejemplo. De aquí, que el *círculo* se torna *segmento*, los *sectores* en *subsegmentos*, las *medidas* de *superficies de sectores* —proporcionales a *ángulos* y *arcos*— estarán expresadas en las **longitudes de los correspondientes subsegmentos.**

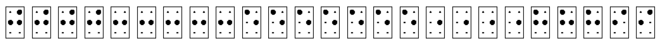
No importa si el *segmento global* y los *subsegmentos de la partición* son *abiertos*, *cerrados* o *semiabiertos*: lo relevante es su *medida*, idéntica para todos estos casos. Como tampoco importaba si los radios —representados ahora por *puntos*— en el *diagrama original* se incluían o no en uno de dos *sectores contiguos*: por ser de *medida nula* —*superficie del radio*, como sector; *longitud de un punto*, como segmento—, son irrelevantes a efectos representativos.

Tabla 5-28. Diagrama de sectores circulares
Representación/adaptación Braille

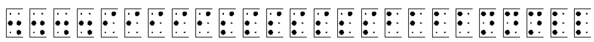
Modelo A



Modelo B



Modelo C



Y pueden aplicarse ahora cuantas sugerencias y recomendaciones se ofrecían en la Sección 5.1:

Tabla 5-29. Diagrama de sectores circulares (con sólo valores numéricos)
Representación/adaptación Braille

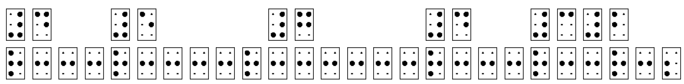


Tabla 5-30. Diagrama de sectores circulares (con información conceptual y diferenciación Cromática)
Representación/adaptación Braille

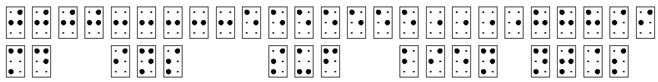
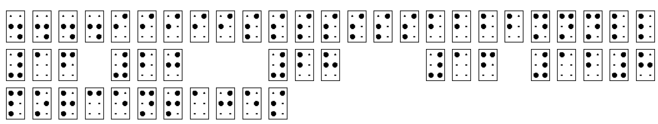


Tabla 5-31 Diagrama de sectores circulares (con información porcenptual y diferenciación Cromática)
Representación/adaptación Braille



Las dificultades surgirán en la determinación de:

a) Dimensión (longitud) del *segmento global* que, dentro de las posibilidades de la línea o página Braille, permita recoger la información adicional conveniente. Dependerá, en principio, de:

— Número de sectores.

— Número de caracteres Braille exigidos por la información numérica o literaria referida a cada uno; en particular, para el de menor superficie. Aunque podrá recurrirse a emplazar las leyendas en líneas adicionales.

— Tamaño de los sectores y proporciones mutuas, expresables como fracciones enteras.

b) Adopción como *unidad lineal* la longitud equivalente a la superficie del menor de los sectores, o una fracción entera suya, tal que convierta las restantes medidas en múltiplos enteros de ella.

La suma de todas las longitudes así calculadas deberá indicar la decisión de:

— Ampliación/reducción de la *unidad lineal*, a fin de que la *dimensión global* sea abarcable por la línea o página Braille, a la par que garantice una clara distinción/proporción entre *subsegmentos*.

— En su caso, optar por una *representación vertical*.

c) Decisión sobre la información a adjuntar a cada *subsegmento*:

— Numérica.

— Literaria.

— Diferencia de textura (caracteres Braille distintivos).

La decisión sobre las dos primeras, y su consecuente representación Braille, puede dar lugar a su vez a revisar la decisión adoptada en b).

d) Redondeo de los *valores de representación* para los diferentes *subsegmentos*, conforme a las proporciones mutuas de b) y las posibilidades Braille.

Tanto en este aspecto como en el anterior no debe olvidarse que se persigue una *representación útil*, no una *transcripción íntegra* ni *exacta* del diagrama original en tinta.

e) Decisiones de ordenación opcional de los *subsegmentos*.

Como en tantos otros tipos de representaciones, este algoritmo indicativo para una mejor adaptación a la expresión Braille puede parecer complejo y dificultoso. La réplica a estas objeciones queda reservada a la práctica y a la propia complejidad de la situación, imprevisible *a priori*. En cualquier caso: posible, automatizable y, con muy escasa práctica, de realización rápida.

REPRESENTACIÓN/ADAPTACIÓN BRAILLE DE *DIAGRAMAS EN SECTORES CIRCULARES*

Criterios de simplificación y configuración

1º Determinaciones previas:

a) sector —futuro subsegmento— de menor medida;

b) tipo de información a adjuntar a cada futuro subsegmento;

c) espacio Braille (número de caracteres) aproximado requerido por la información a adjuntar al menor futuro subsegmento;

d) longitud aproximada del *segmento global* (*en columnas* o *número de caracteres Braille*), en función de las anteriores determinaciones.

2º Decisiones de adaptación específica:

a) reducción —en su caso— del espacio Braille a destinar para la información adjunta al menor futuro subsegmento;

b) supresión o transformación de la información a adjuntar a cada futuro subsegmento, o decisión de emplazarla en dos líneas;

c) revisión de la longitud aproximada del segmento global, a resultas de las anteriores decisiones, y posible revisión de éstas;

d) posición (horizontal o vertical) del segmento global; teniendo en cuenta la mayor dificultad representativa de la *posición vertical*.

3º Determinación de la longitud Braille (número de *columnas* o *líneas*, según posición) de cada subsegmento; mediante redondeo de la proporción con el menor de los *subsegmentos previstos*.

4º Trazado del correspondiente subsegmento Braille y sus *informaciones adjuntas*.

5º Reiteración de los pasos 3º y 4º para cada subsegmento. En caso de *posición horizontal* del *segmento global*, la información numérica y/o literaria a adjuntar —modificada, en su caso, conforme a las decisiones adoptadas en 2ºB— puede efectuarse *a posteriori*, siguiendo cada línea.

Cuando se dispone de información suficiente acerca del *diagrama a representar*, los estadios 1º y 2º pueden omitirse en su totalidad como *estadios previos*, e iniciar directamente la tarea en 3º, procediendo localmente a las necesarias estimaciones y transformaciones. Si se excediera la longitud de la línea Braille o se tropezara con dificultades de espacio para adjuntar ciertas informaciones adjuntas —que puede incluso que obliguen a revisar dimensiones o posición del diagrama—, se habrá procedido sin embargo a efectuar los cálculos y transformaciones necesarias, *por tanteo,* en estas ejecuciones fallidas.

5.5. GRAFOS GENERALES

El concepto matemático de *relación* quizás sea el más general, hallándose en los fundamentos mismos de la misma Matemática.

Al llegar a identificarse *clase* y *relación* (la *clase* definida como su *ley* o *relación de pertenencia*), cualquier otro objeto matemático puede ser definido en términos relacionales: correspondencias y funciones, conjuntos numéricos, operaciones y leyes de composición, objetos geométricos... Incluso el propio concepto de *par ordenado* —a partir del cual se define ordinariamente una *relación*— puede expresarse en términos de *relación general*.

Pero no es propósito de este trabajo adentrarse en los dominios de la Teoría de Clases y Fundamentos de la Matemática o de la Lógica.

Se distinguen *relaciones binarias* —expresadas mediante *pares ordenados*—, *ternarias*, *n-arias*...; reduciéndose todas ellas a las primeras.

Las *relaciones binarias* tienen una expresión gráfica adecuada y clara: su *grafo*, en la que:

1º Los *elementos* se representan por *puntos* o por la notación distintiva de cada uno (*letras*, *números*, *símbolos*, etc.)

2º Cada *par ordenado* se representa por una *flecha*, con origen en el *primer elemento* y extremo o fin en el *segundo elemento* del *par*.

Esta caracterización es válida e inmediata para las *relaciones binarias*. Con un pequeño aditivo, llegamos al modelo conocido en la literatura como *grafo general*, que puede entenderse engloba al anterior, pero que responde más bien a un tipo de *relación ternaria*:

3º A cada *flecha* se le adjudica un *valor* o *valoración*. Ya sean *numérico* o *conceptual*.

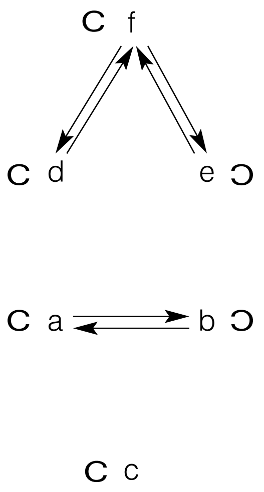
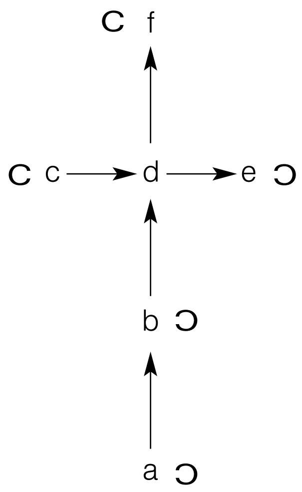
Trataremos en esta Sección de los *grafos elementales*, *valorados o no numéricamente*, y algún tipo de *grafo valorado conceptualmente* —aunque no se les conozca por este apelativo genérico—. En la siguiente, nos referiremos a formas gráficas que podrían considerarse asimismo como *grafos*, aunque también rehuiremos tal denominación.

En la mayoría de los casos, se propone más de una familia de signos Braille. Son muy semejantes en su *forma*, al ser reconocidos hápticamente en el conjunto del diagrama; difieren, no obstante, notablemente en su realización, exigiendo mayor o menor destreza de pulsación con los dedos de una u otra mano.

5.5.1. GRAFOS ELEMENTALES

Su importancia didáctica es innegable. Las propiedades de *relaciones binarias* y *correspondencias* se hacen *visibles* con una evidencia aún mayor, más fácil de reconocer y expresar informalmente, que la enunciada páginas atrás para las *tablas/diagrama cartesianas* (Apartado 5.2.1). Correlativos con los ejemplos de entonces, se tendrían los *grafos*:

Grafos de relaciones binarias

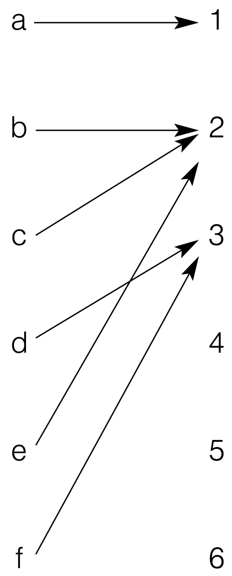
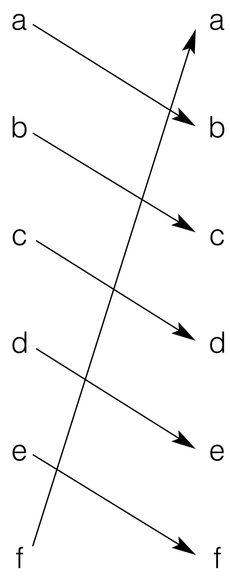
{(a,a), (a,b), (b,a), (b,b), (c,c), (d,d), (d,e), (d,f), (e,d), (e,e), (e,f), (f,d), (f,e), (f,f)}	{(a,a), (a,b), (b,b), (b,d), (c,c), (c,d), (d,d), (d,e), (d,f), (e,e), (f,f)}
	

Expresión gráfica de propiedades para las relaciones binarias

Propiedad Reflexiva	todos los elementos tienen *bucle* (*flecha* que sale y vuelve al elemento)
Propiedad Antirreflexiva	ningún elemento con *bucle*
Propiedad Simétrica	para toda *flecha* existe su *contraria* (o: todas las *flechas* son *dobles*)
Propiedad Antisimétrica	para ninguna *flecha* existe su *contraria* (o: todas las *flechas* son *simples*)
Propiedad transitiva	si hay dos *flechas consecutivas*, también está la *flecha compuesta*

Como en 5.2.1, resultan inmediatas las caracterizaciones de *elementos notables*, propios de las *relaciones de orden*; o la aparición de las *clases* y del *conjunto cociente* en las *relaciones de equivalencia*.

Grafos de funciones

{(a,1), (b,2), (c,2), (d,3), (e,2), (f,3)}	{(a,b), (c,d), (e,f), (d,e), (f,a), (b,c)}
	

Expresión gráfica de propiedades en las correspondencias

Dominio u Original	conjunto de elementos de los que *parte alguna flecha*
Recorrido o Imagen	conjunto de elementos a los que *llega alguna flecha*
Función (en sentido estricto)	de cada elemento del *conjunto inicial* sale *como mucho una flecha*
Aplicación	de cada elemento del *conjunto inicial* sale *una sola flecha*
Suprayectividad	a todo elemento del *conjunto final* llega alguna *flecha*
Inyectividad	a cada elemento del *conjunto final* llega *como mucho una flecha*
Biyectividad	de cada elemento del *conjunto inicial* sale una sola *flecha*, y a cada elemento del *conjunto final* llega *una flecha, y sólo una*
Correspondencias/ Funciones Inversas	*flechas* en *sentido inverso*

Su versión Braille presenta problemas hasta ahora nuevos:

a) Representación de *flechas*; o, lo que es lo mismo: representación de *dirección* y *sentido*.

Contamos con sugerencias:

— Las notaciones previstas para el *Braille lineal*, como son:

Tabla 5-32. Signos Braille para representación de flechas

Flechas horizontales						
Sencillas	⠒⠂ 25,2	⠐⠒ 5,25	⠒⠕ 25,135	⠪⠒ 246,25	⠶⠕ 2356,135	⠪⠶ 246,2356
Dobles	⠐⠒⠂ 5,25,2	⠚⠒⠖ 245,25,235	⠲⠒⠓ 256,25,125	⠪⠒⠕ 246,25,135	⠪⠶⠕ 246,2356,135	

Flechas verticales							
Sencillas				Dobles			
⠸⠄	⠸⠁	⠠⠇	⠈⠇	⠸⠅	⠨⠇		
456,3	456,1	6,123	4,123	456,13	46,123		
⠿⠄	⠿⠁	⠠⠿	⠈⠿	⠿⠅	⠠⠿⠁	⠨⠿	⠈⠿⠄
123456,3	123456,1	6,123456	4,123456	123456,13	6,123456,1	46,123456	4,123456,3

que podrán ser prolongadas a placer.

— Dotar las *líneas horizontales* usadas en las gráficas de la Sección 5.3 de algún signo que indique *punta de flecha*, con lo que quedaría determinado su sentido.

Para la elección definitiva, es necesario tener en cuenta que será imprescindible el empleo de *flechas verticales*, y que la representación del sentido en éstas y las *horizontales* debe ser semejante; en ambos casos, de rápido trazado y reconocimiento.

b) Reducir la ilimitada variedad de *direcciones* a las dos únicas posibles de expresar mediante la máquina Perkins (horizontal y vertical); en particular:

c) Prever la representación de *bucles*.

Algo, esto último, que puede ser resuelto de inmediato, sin más que adoptar para su representación el indicado en la Sección 3.4 para la *circunferencia* (⠪⠕, puntos 246,135); un signo evocador y de fácil reconocimiento en composiciones bidimensionales.

Cualquier *flecha* de dirección distinta de las consabidas deberá verse transformada. Pero una *flecha* no es sino la expresión gráfica de un *par ordenado*; luego: lo único esencial en ella son los extremos —y su orientación—, no el recorrido. Podemos, pues, tomar como tal una *poligonal de trazos horizontales y verticales*. La sencillez de ejecución, exploración y representación interior exigen que tales *poligonales* consten de un mínimo de trazos. Y una limitación: evitar cruzamientos; prudencia que —aconsejada también en tinta: confiere *diafanidad* al diagrama—, aquí resultará casi imprescindible.

Tabla 5-33. Signos Braille para representación/construcción de flechas (en diagramas de grafos; caso general)

Bucle	Flechas horizontales	Flechas verticales
	→ ← ↔	↓ ↑ ↕
⠪⠕	⠒⠒⠕ ⠪⠒⠒ ⠪⠒⠒⠕	⠸ ⠪⠂ ⠪⠂ ⠸ ⠪⠂ ⡸⠇ ⠪⠂
246,135	25,25,135 246,25,25 246,25,25,135	456;246,2 246,2;4567,123;246,2 246,2;456

Tabla 5-34. Simplificación

Bucle	Flechas horizontales	Flechas verticales
	→ ← ↔	↓ ↑ ↕
⠪⠕	⠒⠒⠂ ⠐⠒⠒ ⠈⠭⠄	⠸ ⠂ ⠠ ⠸ ⠠ ⠸ ⠈
246,135	25,25,2 5,25,25 4,1346,3	456;2 6;456 6;456;4

Cambios de dirección			
┐	┌	┘	└
⠒⠲	⠰⠒	⠒⠚	⠘⠒
25,256	56,25	25,245	45,25

La obligada reducción a dos del número de direcciones traerá consigo una deformación geométrica notable: en la máquina Perkins, todos los grafos aparecerán como adición de diagramas rectangulares de trazos.Y, en consecuencia, algo esperable: penuria de formas, monotonía, dificultad de evocación. Pero ajustados al contenido matemático, realizables, didácticamente eficaces.

d) Procurar que las configuraciones geométricas del conjunto resultante sean didácticamente adecuadas.

Este tipo de representaciones son algo más que la expresión bidimensional de una relación dada. Esto sería, de suyo, la respuesta a un problema lingüístico-matemático. Pero se pretende que sea también un instrumento de aprendizaje, de cálculo, de investigación. Debe exigírseles, por consiguiente, que faciliten al estudiante ciego las actividades básicas del *trabajo con diagramas*; concretamente: que se adecuen a la exploración háptica y faciliten la generación de configuraciones interiores evocadoras y flexibles.

La primera de estas condiciones —adecuación a la exploración háptica— puede considerarse garantizada en gran medida, desde el momento que se están utilizando:

— Un sistema de estímulos conforme a la excitación táctil: puntos Braille.

— Dimensiones que oscilen entre un mínimo que confiera claridad a la representación en todos sus detalles, y un máximo que no exceda el ámbito bimanual. Pero esto también parece estar garantizado, al menos en su dimensión máxima, al quedar limitados por la página Braille. Conviene, pues, tener presente el requisito de *“mínimo de claridad”*.

Aparte de éstos, ciertos aspectos formales favorecen la construcción y evocación de configuraciones bidimensionales, obtenidas tanto por vía háptica como visual:

— simetrías axiales respecto de los *ejes básicos*; y aun:

— simetrías axiales locales (o de partes del diagrama);

— tendencia a formas geométricas simples;

— predominio de un número reducido de direcciones y sentidos; en particular, siguiendo la práctica lectora (en las lenguas occidentales):

— tendencia a los sentidos *izquierda-derecha* y *arriba-abajo*, o *simplificación de sentidos*.

Un buen ejemplo de aprovechamiento de estas características deseables las encontramos en los diagramas que se estudian en el próximo Apartado.

Por último, un aspecto adicional, propio de los *grafos valorados*, así como de ciertos *esquemas funcionales*:

e) Posibilitar la adjunción a cada *flecha* de un *valor*, *numérico* o *conceptual*.

Que se reduce a un simple *problema de espacio*; remitiendo, si es preciso, a *notas explicativas*.

Todo ello llevará, muy posiblemente, a un *rediseño del diagrama*. Pero el *diseño inicial*, en funciones de *borrador* o *bosquejo*, habrá servido para *“comprender la relación”* y *“construir una primera representación interior”*; imprescindible para lograr ulteriores *optimizaciones*. Persuadidos de que “toda representación es perfectible”, y que quizás “no exista la representación perfecta o ideal” (tampoco tiene por qué *ser única*).

Como en el caso de las *representaciones cartesianas*, se economizará gran cantidad de ensayos baldíos, tiempo y esfuerzo, si de antemano se determinan ciertos aspectos (véase más abajo). Tal recomendación es útil también en el diseño de *grafos* en tinta; pero mientras que el rediseño, borrado, tachado, etc., es rápido y cómodo en tinta, resulta en Braille mucho mas lento y trabajoso: es preciso repetirlo. Razón por la cual se presta aquí especial atención a esta fase de análisis y diseño previos.

REPRESENTACIÓN/ADAPTACIÓN BRAILLE DE *GRAFOS ELEMENTALES* PARA *RELACIONES BINARIAS*

Criterios de simplificación y configuración

1º Análisis de la información contenida en el diagrama o definición de la *relación* de referencia. Determinación de:

a) Elementos o vértices que intervendrán directamente en el diseño; esto es: clasificación en *elementos aislados* y *no aislados*.

b) *Grado de importancia* de cada elemento *no aislado* como *nudo*; es decir: dado un elemento, determinar sus *antecedentes* (elementos de los que *recibe flechas*) y *consecuentes* (elementos hacia los que *envía flechas*). En particular:

c) Elementos *extremales*: *minimales* (*no reciben flechas*, salvo de sí mismo) y *maximales* (*no envían flechas* a otros distintos de él).

d) *Cadenas de flechas* o *sucesiones de pares consecutivos*.

e) Posibles subconjuntos que —aun sin ser completamente *independientes entre sí*— acumulan una mayor *densidad de flechas*, y podrían considerarse como *partes* o *subdiagramas*.

f) *Cadenas no cíclicas* candidatas a *cadenas de longitud máxima*.

2º Cálculo aproximado de las dimensiones del diagrama. Mediante la determinación de:

a) *Valoración* a adjuntar a cada *flecha*, en su caso; que repercutiría en la *longitud mínima* por *flecha*.

b) Dirección preferente de las *flechas* (horizontal o vertical); aceptando en principio la proporción: *una línea, dos columnas*. Vendrá señalada por la *cadena máxima* de 1º f.

3º Distribución espacial aproximada de elementos:

a) Los elementos *minimales* se sitúan en el *inicio del diagrama*: zona superior, si predominará la dimensión vertical, o izquierda, si horizontal.

b) Los elementos *maximales* se sitúan en el *fin del diagrama de flechas*: zona inferior, si predominará la dimensión vertical, o derecha, si horizontal.

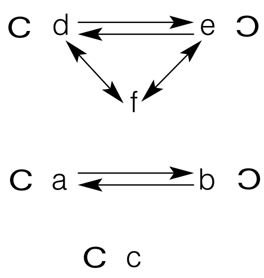
c) Los *elementos medios* (con *antecedentes* y *consecuentes*), a ubicar en la *zona media* del diagrama, reorganizan los *elementos minimales* y *maximales*, que deberán estar próximos a ellos.

d) Los *elememtos aislados* se situarán fuera del *diagrama de flechas*; preferentemente, en la zona inferior.

4º Se trazan las correspondientes *flechas*, sirviéndose de los signos oportunos (ver tablas 5-32, 5-33 y 5-34).

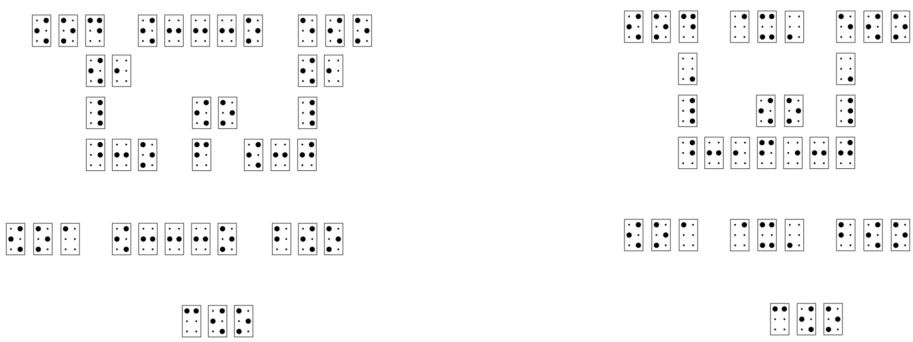
5º Revisión y posible reorganización, procurando configuración *más clara*, con simetrías globales y locales, agrupaciones bien definidas, evitar cruzamientos entre *flechas*, etc.

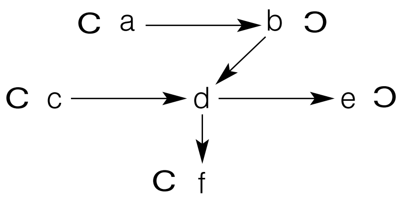
Tabla 5-35. Grafos de relaciones binarias
Representación/adaptación Braille



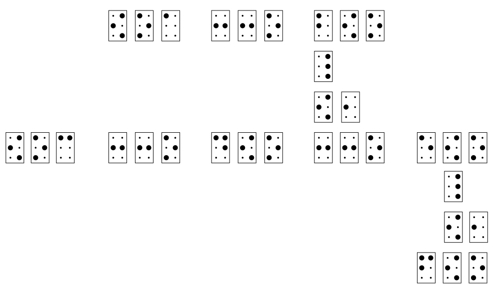
Modelo A

Modelo B

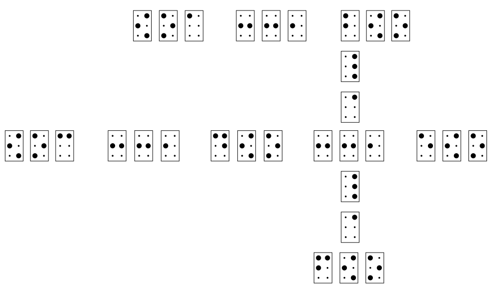




Modelo A



Modelo B (simplificado)



La tarea se aligera notablemente en el caso de las *correspondencias* y *funciones*, al conocerse de antemano los conjuntos *inicial* y *final*, que englobarían a los *elementos minimales* y *maximales*, respectivamente, de las *relaciones binarias*, y no existir *elementos medios* o *nudos*, ni *flechas dobles*, estar *bien definido* el *sentido* de las *flechas*...

REPRESENTACIÓN/ADAPTACIÓN BRAILLE DE *GRAFOS ELEMENTALES* PARA *CORRESPONDENCIAS* Y *FUNCIONES*

Criterios de simplificación y configuración

1º Análisis de la información contenida en el diagrama o definición de la *correspondencia* de referencia. Determinación de:

a) Elementos o vértices que intervendrán directamente en el diseño; esto es: determinación de los *elementos originales* del *conjunto inicial* (tienen homólogo o *imagen* en el *final*) y *elementos imagen* del *conjunto final* (son *imagen* de algún *original*).

b) *Grado de importancia* de cada elemento *no aislado* como *nudo*; es decir: para cada *elemento original*, determinar sus homólogos o *imagen* (elementos a los que *envía flechas*) y, asimismo, para los *elementos imagen* (elementos de los que *recibe flechas*).

c) Posibles subconjuntos de elementos en ambos conjuntos (*inicial* y *final*) que —aun sin ser completamente *independientes entre sí*— acumulan una mayor *densidad de flechas*, y podrían considerarse como *partes* o *subdiagramas*.

2º Cálculo aproximado de las dimensiones del diagrama.

a) Verticales: en función del total de elementos del *conjunto inicial*, de una parte, y del *imagen*, de otra.

b) Horizontales: teniendo presente las *flechas* que, en su caso, deberán *partir* o *llegar* a un mismo elemento.

3º Distribución espacial de elementos:

a) Los elementos del *conjunto inicial* se sitúan a la izquierda; los del *conjunto final*, a la derecha.

b) Los *elememtos aislados* de cada conjunto (sin homólogo en la *correspondencia*) se situarán en la región superior o inferior del *diagrama*.

c) Se sitúan a la misma *altura* (a ser posible, en la misma línea, o próximas) los *elementos en correspondencia* en uno y otro conjunto.

4º Trazado de *flechas*, sirviéndose de los signos oportunos (ver tablas 5-32, 5-33 y 5-34).

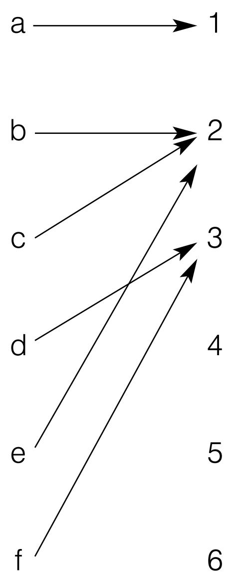
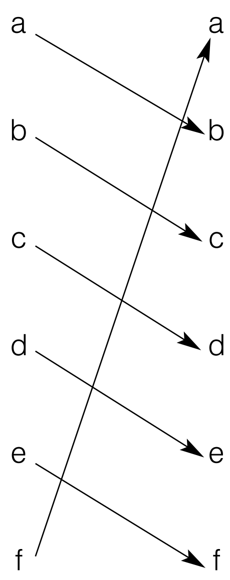
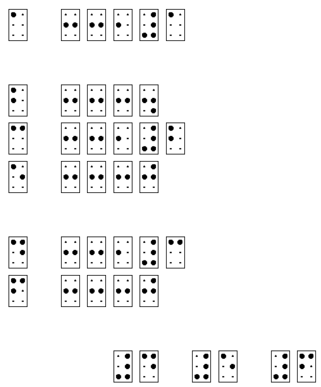
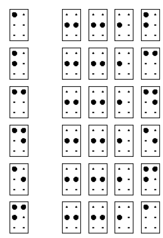
Si de un mismo elemento del *conjunto inicial* parten varias *flechas*, pueden tener un *tramo inicial común* (adquiriendo entonces el “haz” forma de “tenedor”).

Si a un mismo elemento del *conjunto final* llegan varias *flechas*, pueden *fusionarse* anticipadamente, con un *tramo final común* (ídem).

5º Revisión y posible reordenación de elementos, procurando una configuración *más clara*, con agrupaciones locales. o simetrías globales, reducción de cruzamientos entre *flechas*, etc. Es decir: en su caso, *reelaboración del diagrama*.

Tabla 5-36. Grafos de funciones

Representación/adaptación Braille

5.5.2. FORMAS RAMIFICADAS

Son **grafos de relaciones antisimétricas y antirreflexivas, sin ciclos y no transitivas (en principio);** es decir: consta tan sólo de *flechas simples*, sin presencia de *flechas compuestas* —aunque existan *pares ligados*—.

Cada *elemento no extremal* toma la función de *nudo* o *punto de ramificación*: a él llega *sólo una flecha*, y *una o varias* parten de él.

A) **Diagramas *en árbol***

El modelo más significativo de las *formas ramificadas* es el *diagrama en árbol*, en el que las *flechas* configuran una estructura que, cual "planta trepadora", sus ramas se van *abriendo*, diversificándose más o menos, hasta llegar a *puntos muertos* o *maximales*.

Por otra parte —y esto es esencial—, *no existen cadenas equivalentes de flechas o pares ligados*; es decir, no cabe alternativa de itinerarios entre dos puntos cualesquiera: o no están relacionados mediante una *cadena*, o ésta es única. Con esta condición se asegura que el diagrama es *"plano y sin cruzamiento de flechas"*.

Desde un *elemento minimal* determinado, y avanzando por una *cadena cualquiera de flechas*, pueden distinguirse *niveles* u *órdenes de profundidad*, que pueden corresponder a *criterios* o *caracterizaciones*, *grados de concreción o complejidad*, etc. De alguna forma, estos conceptos denunciarían la *máxima longitud de las cadenas*, o darían una *"medida longitudinal del diagrama"*; aunque existan *cadenas interrumpidas* o imposibilidad de alcanzar un cierto nivel siguiendo una secuencia determinada.

Partiendo de uno o varios *elementos minimales* o *primitivos*, las *flechas* se yuxtaponen unas a otras, sin "vuelta atrás". En consecuencia, en el diagrama predomina *una dirección*. Dirección que puede considerarse *implícita*, por analogía con las privilegiadas en la lectura de textos literarios (en las lenguas occidentales: *de izquierda a derecha* y *de arriba abajo*), u otras cualesquiera. De esta forma, las *flechas* pueden sustituirse por simples *segmentos*.

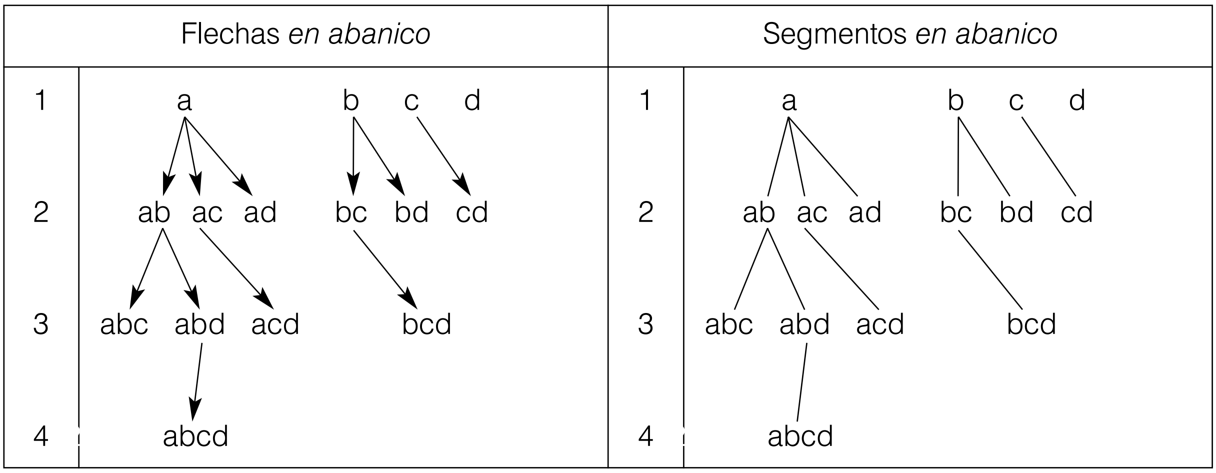
Cada *elemento minimal* o *primitivo* da lugar a un *subdiagrama independiente*. El *diagrama global*, por consiguiente, puede considerarse una yuxtaposición de éstos, en el que se corresponden los *niveles*.

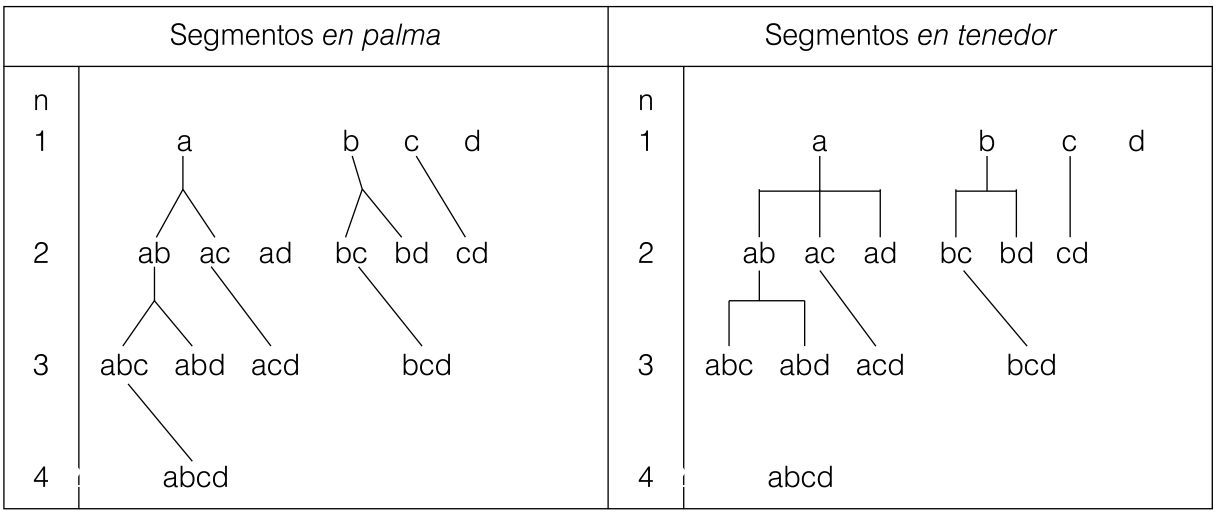
El uso ha ido introduciendo simplificaciones y licencias por las que:

— El "haz de flechas" o "abanico" con origen en un elemento se sustituye por *"una única flecha que más tarde se ramificará"*, a guisa de "palma" o "tenedor".

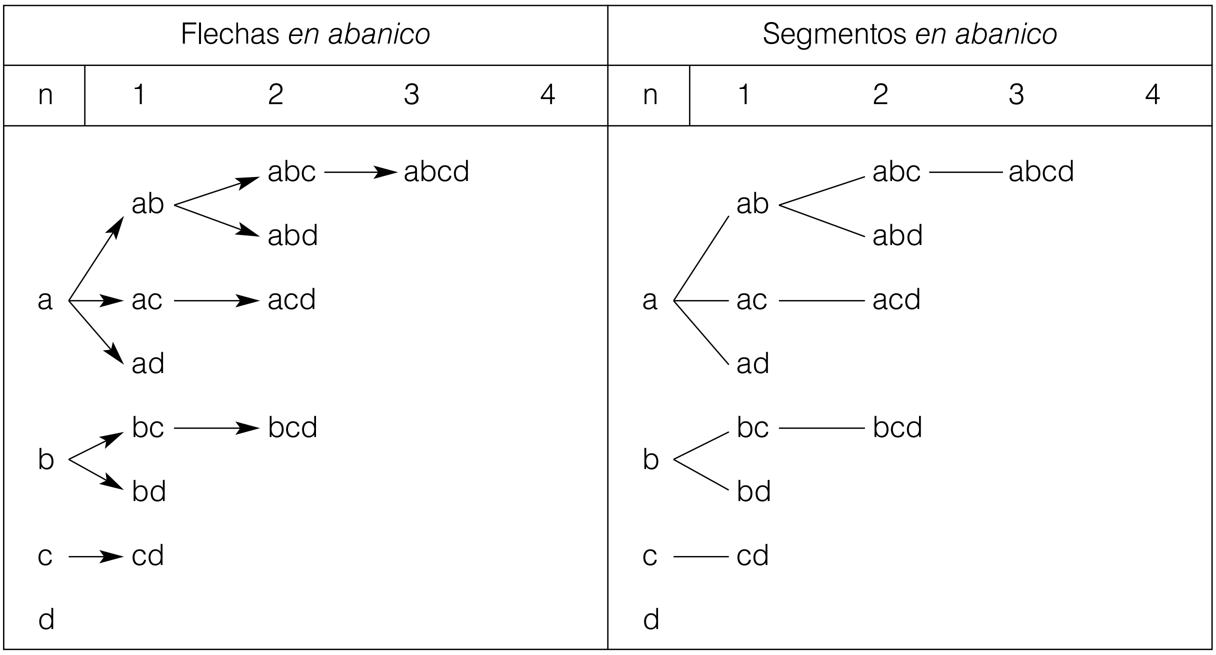
Combinaciones de 4 elementos tomados de n en n (sin rep.)

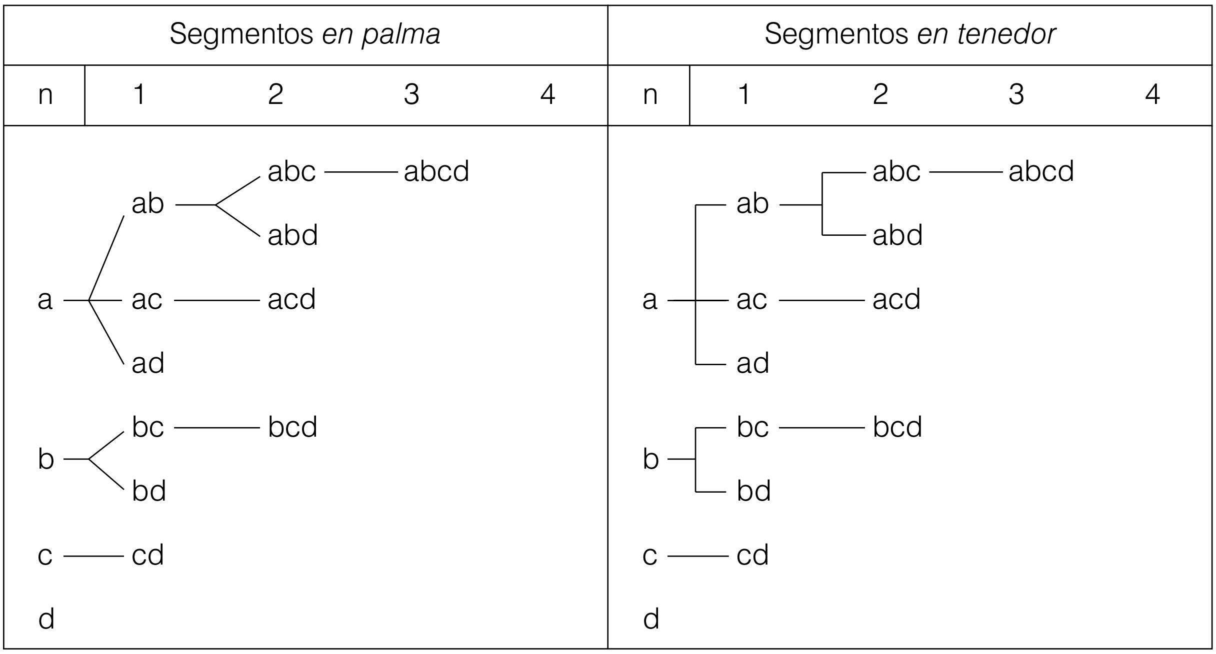
Diagramas en árbol de crecimiento o disposición vertical





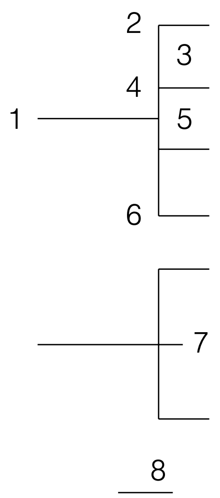
Diagramas en árbol de crecimiento o disposición horizontal





La restricción de direcciones en la máquina Perkins se servirá precisamente de esta última versión "en tenedor", sea en *disposición vertical* u *horizontal*. Prefiriéndose, a su vez, la segunda, por facilitar la distribución de espacios de los *diagramas parciales* o "ramas" sin necesidad de anticipar los requisitos de espacio y distribución del total de valores *maximales* o *terminales*. Al tiempo que supondrá un preámbulo para el diseño de los *cuadros sinópticos*.

Tabla 5-37. Signos Braille para representación de diagramas en árbol

Presentación en *disposición horizontal*							
Modelo A					Modelo B		
25	⠒	1		1	⠐⠒	5,25
56,2	⠰⠂	2		2	⠖	235
456	⠸	3		3	⠇	123
456,2	⠸⠂	4		4	⠗	1235
2456	⠺	5		5	⠐⠇	5,123
45,2	⠘⠂	6		6	⠓	125
2456,2	⠺⠂	7		7	⠐⠗	5,1235
5,2	⠐⠂	8		8	⠐⠂	5,2

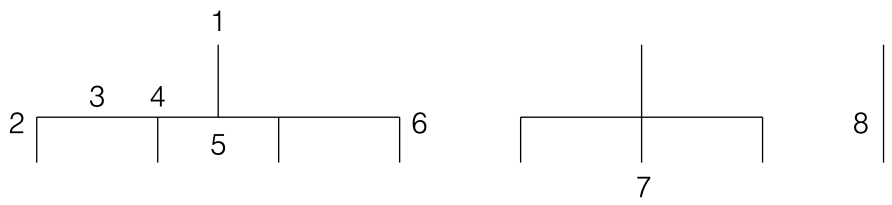
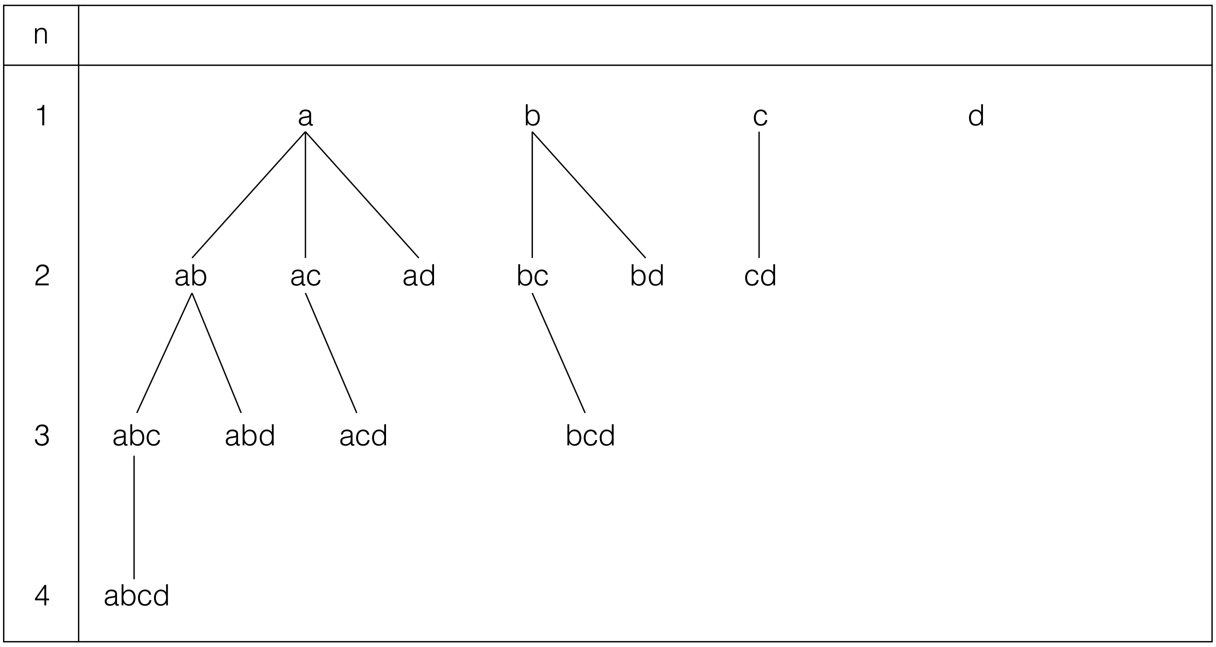
Presentación en *disposición vertical*								
Modelo A	456	56,25	25	256,25	245,25	25,256	2456,2	45,0
	⠸	⠰⠒	⠒	⠲⠒	⠚⠒	⠒⠲	⠺⠂	⠘
	1	2	3	4	5	6	7	8
								
Modelo B	1	2	3	4	5	6	7	8
	⠇	⠖⠒	⠒	⠒⠖	⠒⠓	⠒⠆	⠒⠗	⠃
	123	235,25	25	25,235	25,125	25,23	25,1235	0,12

Tabla 5-38. Combinaciones de 4 elementos tomados de n en n (sin rep.)
Diagrama en árbol de crecimiento o disposición vertical



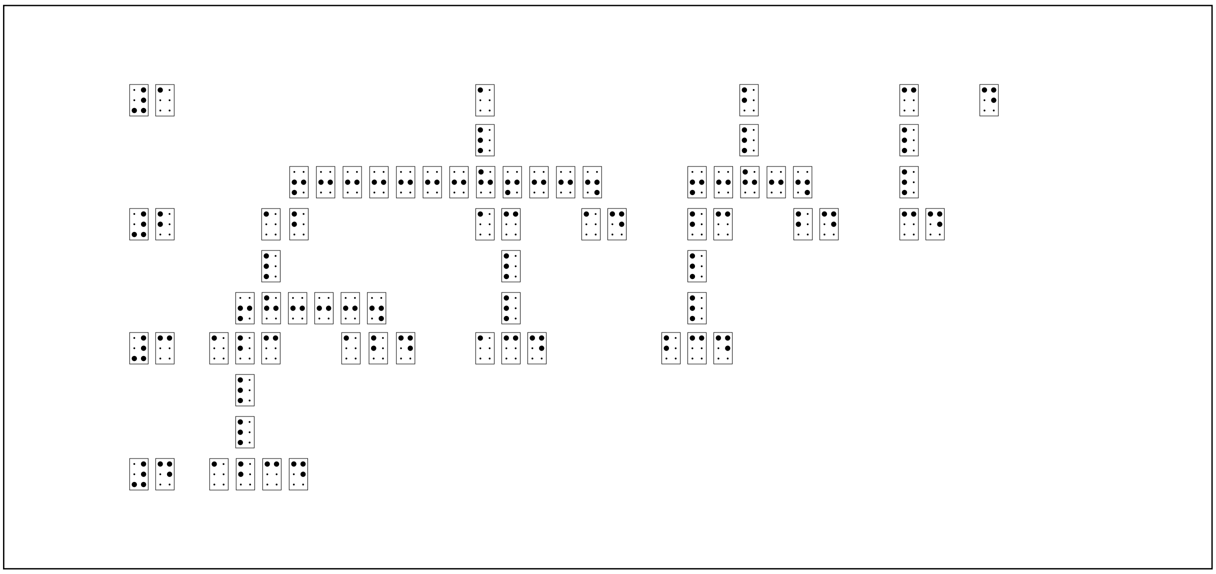
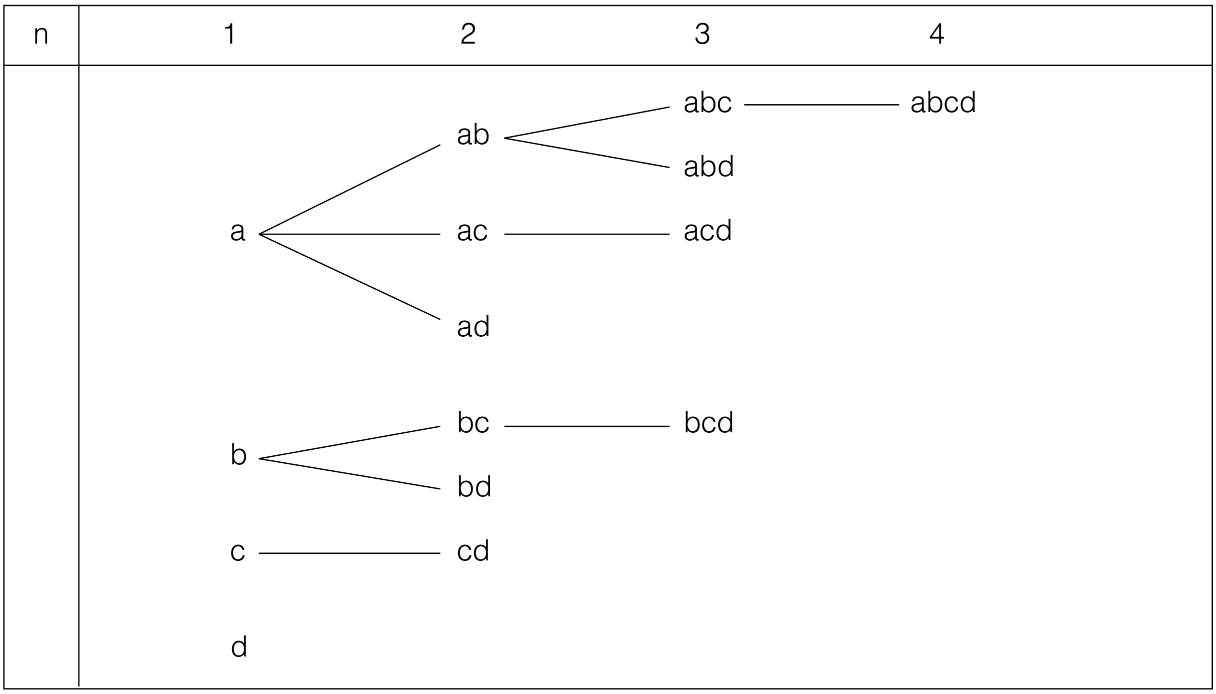
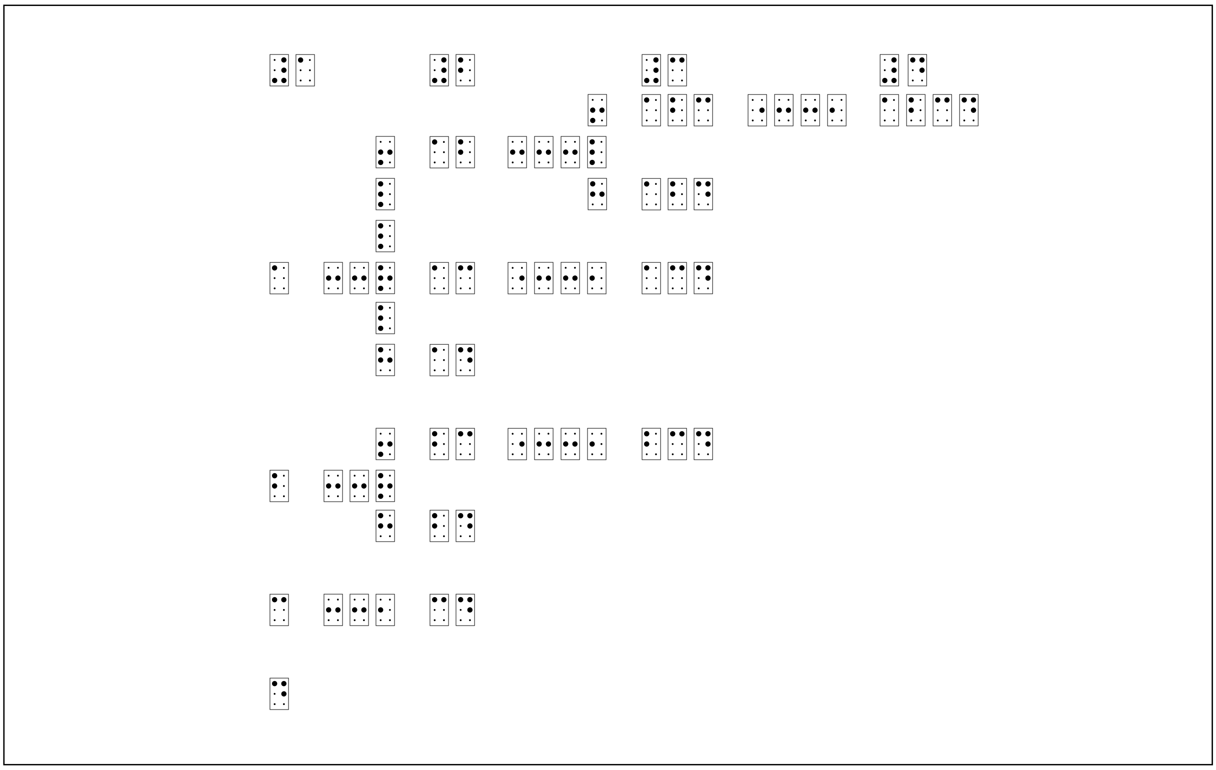


Tabla 5-39. Diagrama en árbol de crecimiento o disposición horizontal





En el afán de reducir la construcción, se adoptan en ocasiones decisiones simplificativas:

— Los *nudos de ramificación* se denominan con sólo el *nuevo elemento* o criterio a incorporar.

— Se suprime la denominación de los *nudos medios* y aun *iniciales*, sustituyéndola por *cabeceras de columna* o *nivel*; respetando tan sólo la correspondiente a *elementos maximales* o *finales de cadena*. En caso de reflejar cada *nivel* una *propiedad* (presencia o no del valor *cabecera*), se corresponde con una sucesión de subdivisiones dicotómicas.

En Braille, no obstante, parece recomendable mantener siempre que sea posible la expresión completa de los *nudos* —o reducida, cuanto menos—, evitando así la construcción por adición a lo largo de cada cadena o el recurso a la exploración en columna a fin de localizar su *cabecera*.

REPRESENTACIÓN/ADAPTACIÓN BRAILLE DE *DIAGRAMAS EN ÁRBOL*

Criterios de simplificación y configuración

1º Determinación previa de:

a) número de *niveles* o *longitud de cadenas máximas*;

b) tamaño (Braille) previsible para los *elementos maximales* o *terminales de cadena*;

c) En su caso: tamaño (Braille) máximo previsible para la denominación de *nudos* o *cabeceras de nivel*;

d) número de *ramas principales* (*elementos minimales*), que pudieran dar lugar a *subdiagramas independientes*.

2º Decisiones:

a) empleo de estrategias de simplificación, supresión de signos (signos de mayúsculas, de número, etc.) o abreviaturas, que disminuyan el tamaño de las *cadenas máximas*;

b) representación de *nudos* o recurso a *cabeceras de nivel*, según las disponibilidades de espacio por línea —a resultas de las decisiones de a)— y naturaleza del diagrama;

c) determinación de espacios de separación máxima entre *nudos* —que corresponderían a *longitud máxima de flechas-segmento*—.

3º (Opcional.) Centrado de *elementos antecedentes*. Lo que implica la determinación del número de líneas reservado a cada *rama* con origen en un *nudo* —*subdiagrama*, en caso de *elemento inicial*—; será función de:

— número de *elementos terminales* (*maximales*) a los que conduce,

— incrementado —opcionalmente— por una línea por *bloque de elementos terminales*.

4º Escritura, en su caso (a resultas de 2ºb), de las *cabeceras de nivel*, aplicando las estrategias de simplificación acordadas en 2ºA y reservando los espacios de separación decididos en 2ºC.

5º Escritura de las denominaciones de *elementos iniciales* o *elementos raíz* —aplican-do 2ºA—, o la correspondiente reserva de *espacios en blanco* (según 3º).

6º Escritura, en su caso, de las denominaciones de *nudos* —aplicando 2ºA y 2ºC—, o la correspondiente reserva de *espacios en blanco* (según 3º).

En cualquier caso:

7º Escritura de la denominación del correspondiente *elemento terminal*, aplicando 2ºA.

8º Trazado de segmentos-flecha en ramificación con los *elementos consecuentes* (hacia los que parten flechas) ya representados (ver signos en tabla 5-37).

Apenas tiene cabida el planteamiento de la cuestión sobre la orientación horizontal o vertical del diagrama global —o de cada subdiagrama—. Salvo que el número de *elementos maximales* o *terminales de cadenas* lo sean en número muy reducido y exigua amplitud de espacio Braille preciso para cada uno de ellos, los 40 caracteres de la línea Braille serán insuficientes para la *orientación vertical* (emplazamiento horizontal de elementos por *niveles*). La *orientación horizontal* (correspondencia entre *niveles* y *columnas*) adjudica a cada *elemento terminal* una línea Braille, descontada en los espacios reservados a *trazos de cadena*.

El cálculo del número final de líneas abarcadas por cada "rama" y la decisión de intercalar *líneas en blanco* —sugerido en 3º—, permitirían emplazar cada *elemento nudo* —en particular: cada *elemento inicial*— a una *altura media* para la rama que en él se origina. Las *líneas adicionales* permitirían separar las *subramas* por *líneas en blanco*. Una y otra decisiones harían el diagrama más estético, cómodo a la exploración y facilitaría su evocación ulterior. No son aquí esenciales, ya que en principio sólo se persigue mostrar/construir el *conjunto de elementos terminales* y su *ley de formación*; pero tendrá un carácter sustantivo en la presentación terminada de los *cuadros sinópticos* (Apartado B siguiente).

B) **Cuadros sinópticos**

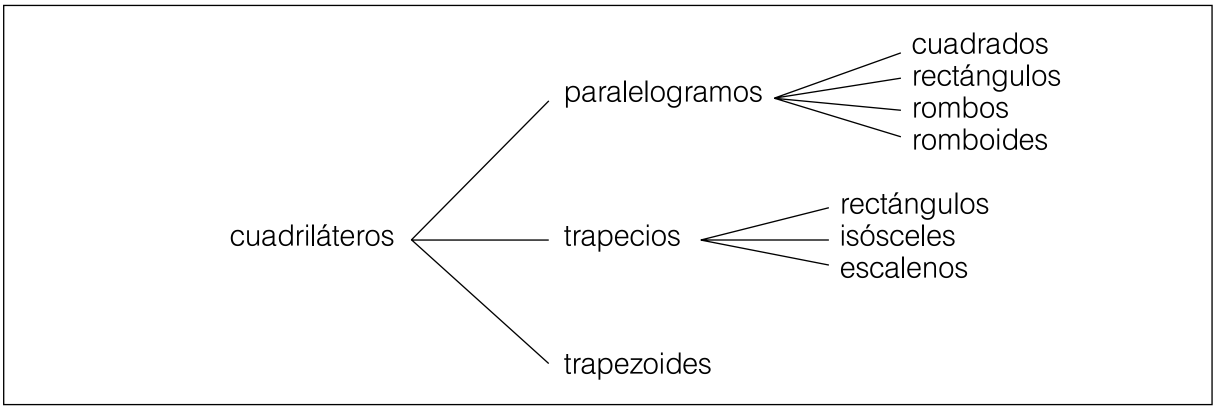
Un *cuadro sinóptico* puede considerarse como

"una clasificación o conjunto de clasificaciones sobre una clase o conjunto general, conforme a criterios sucesivos que dan lugar a «particiones» en subclases cada vez «más finas» —partición de las anteriores—; eventualmente, con «reiteraciones» (sobre una misma subclase, por criterios diferentes)."

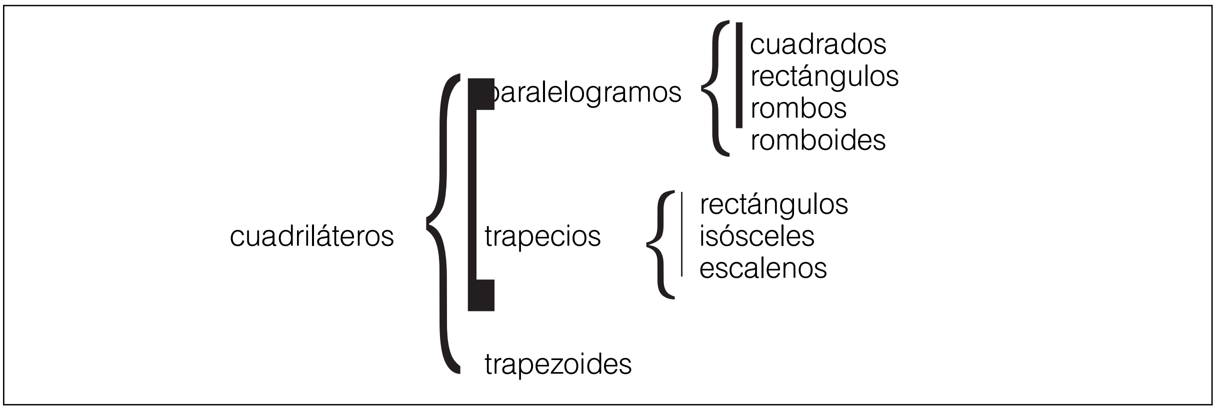
Su *estructura lógico-matemática* sería la de una *relación binaria en árbol* entre los conceptos o términos presentes, en la que las *flechas* representan la relación *"comprende la subclase (excluyente)..."*

Lo más característico en un *cuadro sinóptico* ordinario es su presentación *bidimensional*, gracias a la cual se facilita su aprendizaje y evocación. La *forma terminada* prescinde de las *flechas*, sustituyendo cada *haz de flechas de origen común* por *"una llave que abarca los extremos de aquéllas"*.

Clasificación de cuadriláteros. Diagrama en árbol



Clasificación de cuadriláteros. Cuadro sinóptico



En el orden formal, las estructuras-representaciones de *diagramas en árbol* y *cuadros sinópticos* serían intercambiables. Pero su aplicabilidad didáctica es radicalmente distinta: mientras los primeros se emplean con “fines constructivos” de los *elementos terminales* —en alguna medida: tienen *carácter sintético*—, los segundos son claramente *analíticos, particionales* o *clasificatorios*.

Su proceso de adaptación/representación Braille es en todo análogo al indicado para los *“diagramas en árbol que incluyen la notación para nudos y emplazan éstos en la «línea mediana» respecto de sus correspondientes subclases”*. Con tres géneros de variantes:

a) Opciones de emplazamiento de una clase respecto de sus subclases, en caso de ser par el número de éstas:

— exactamente en la «línea mediana»: ya sea intercalando una *línea en blanco* entre las dos mitades de subclases, ya sea recurriendo al *paso manual de líneas* con el rodillo de sujeción del papel;

— emplazando la denominación de la clase antecedente en la línea inmediatamente anterior o posterior a la «interlínea mediana», sin inclusión de *línea en blanco* entre las subclases consecuentes.

Estas opciones tendrán relevancia representativa sólo cuando el *“número de líneas dependientes de una clase”* sea muy reducido (2 ó 4); en la mayoría de los casos, se puede aplicar directamente la segunda opción, pasando tan ligera desviación relativa inadvertida a la exploración háptica (más grosera que la visual).

b) Signos para la representación de las “llaves”: como *llaves curvas* y como *corchetes cuadrados* (véase más abajo).

c) Respeto opcional de una *línea en blanco*, si una subclase debe emplazarse justo en la línea inmediata inferior a otra con distinto antecedente.

Salvo que se parta de un esquema completo, la elaboración de un *cuadro sinóptico* requiere de ordinario, tanto en Braille como en tinta, dos fases bien diferenciadas:

1ª Construcción propiamente dicha; o determinación de subclases sucesivas y estructuración lógica, sin atención a la disposición espacial.

2ª Confección de la *forma terminada*, que muestre una distribución espacial armónica (correcto emplazamiento de clases antecedentes respecto de sus consecuentes).

Para la construcción inicial o bosquejo del cuadro suelen emplearse diversas técnicas:

— Trazado de flechas. Tal como se procedería para un *diagrama de flechas* ordinario, aun con el riesgo de falta de espacio o descolocación provisional. Claro que este procedimiento resultaría en Braille tan trabajoso —o más— que la propia construcción del cuadro.

— Ordenación lógica y sangrados proporcionales a los niveles; muy útil y cómoda, sobre todo cuando se emplea un *procesador de texto*, que permita insertar líneas o términos.

Clasificación de poligonales planas empleando sangrados proporcionales

- Abiertas
- Cerradas
  - Cóncavas
    - Cuadriláteros cóncavos
    - Pentágonos cóncavos
    - Hexágonos cóncavos
    - Heptágonos cóncavos
    - etc.
  - Convexas
    - Triángulos
      - Equiláteros
      - Isósceles
      - Escalenos
    - Cuadriláteros
      - Paralelogramos
        - Equiláteros
          - Cuadrados
          - Rombos
        - No equiláteros
          - Rectángulos
          - Romboides
      - Trapecios
        - Rectángulos
        - Isósceles
        - Escalenos
      - Trapezoides
    - Pentágonos
      - Regulares
      - Irregulares
    - Hexágonos
      - Regulares
      - Irregulares
    - Heptágonos
    - Octógonos
    - Eneágonos
    - Decágonos
    - Polígonos de n lados

— Clasificación decimal. El método más frecuente y eficaz, ya que pueden intercalarse órdenes o subdivisiones, en cualquier momento y sin apenas rectificaciones, tanto con un *procesador de texto* como en papel. Muy adecuado y formativo, incluso en los niveles de enseñanza más elementales.

Clasificación decimal de poligonales planas

- 1 abiertas
- 2 cerradas
  - 2.1 cóncavas
    - 2.1.1 cuadriláteros cóncavos
    - 2.1.2 pentágonos cóncavos
    - 2.1.3 hexágonos cóncavos
    - 2.1.4 heptágonos cóncavos
    - 2.1.5 etc.
  - 2.2 convexas
    - 2.2.1 triángulos
      - 2.2.1.1 equiláteros
      - 2.2.1.2 isósceles
      - 2.2.1.3 escalenos
    - 2.2.2 cuadriláteros
      - 2.2.2.1 paralelogramos
        - 2.2.2.1.1 equiláteros
          - 2.2.2.1.1.1 cuadrados
          - 2.2.2.1.1.2 rombos
        - 2.2.2.1.2 no equiláteros
          - 2.2.2.1.2.1 rectángulos
          - 2.2.2.1.2.2 romboides
      - 2.2.2.2 trapecios
        - 2.2.2.2.1 rectángulos
        - 2.2.2.2.2 isósceles
        - 2.2.2.2.3 escalenos
      - 2.2.2.3 trapezoides
    - 2.2.3 pentágonos
      - 2.2.3.1 regulares
      - 2.2.3.2 irregulares
    - 2.2.4 hexágonos
      - 2.2.4.1 regulares
      - 2.2.4.2 irregulares
    - 2.2.5 heptágonos
    - 2.2.6 octógonos
    - 2.2.7 eneágonos
    - 2.2.8 decágonos
    - 2.2.9 polígonos de n lados

ADAPTACIÓN/REPRESENTACIÓN BRAILLE DE *CUADROS SINÓPTICOS*

Criterios de simplificación y configuración

1º Determinación previa del total de órdenes a incluir y su relación lógica (construcción inicial).

2º Determinación previa de:

a) *ramas principales* o *elementos primarios* (*minimales*) —podrían dar lugar a *cuadros parciales* o *subcuadros*—;

b) total de *órdenes finales* o *elementos terminales*;

c) número máximo de *niveles*, o *longitud de las cadenas máximas* (disminuidas en una unidad);

d) tamaño (Braille) máximo previsible para la denominación de *órdenes* en las *cadenas máximas*, a resultas de:

— número de niveles,

— total de caracteres de la línea a ellos debidos,

— espacios a reservar para *llaves* o *trazos*.

3º Decisiones:

a) A resultas de 2ºd: adopción de estrategias de simplificación, supresión de signos (de mayúsculas, de número, etc.) o abreviaturas, que reduzcan la dimensión Braille de las *cadenas máximas* (tamaño horizontal del cuadro).

b) A resultas de las decisiones de a) y disponibilidades de espacio por línea, y naturaleza del cuadro: decisión de *desdoblamiento del cuadro* (ver más abajo).

c) A resultas de 2ºb, 3ºb y las disponibilidades de la página Braille: decisión de *partición vertical del cuadro* y *elementos primarios de interrupción*.

d) Determinación de espacios a reservar para *llaves* o *trazos*.

4º Determinación del número de líneas reservado a cada *rama* con origen en un orden; será función de:

— número de *elementos terminales* o *maximales* que comprenderá,

— incrementado —opcionalmente— por una línea cada vez que en el cuadro se complete una subdivisión.

5º Escritura de la denominación del correspondiente *orden* —aplicando 3ºA—, o la reserva de *espacios en blanco* exigida por 4º.

6º Trazado de las porciones de *llaves* o *barras de subdivisión*, conformes con los órdenes antecedentes y consecuentes, según determinación previa de 1º (ver signos en tabla 5-40).

7º Reiteración línea a línea —orden a orden— de los estadios 4º a 6º.

8º Según las decisiones de 3ºb y 3ºc, confección de *cuadros adicionales* o prosecución del cuadro interrumpido.

Los cálculos y decisiones de 4° permitirán emplazar cada denominación u orden —en particular: cada *elemento primario*— a una *altura media* para *"la «rama» que en él se origina"*. Las *líneas adicionales* permitirían separar las *subramas* por *líneas en blanco*, dando lugar a la estructura gráfica característica de los *cuadros sinópticos*.

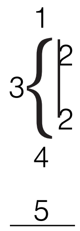
POR *DESDOBLAMIENTO* SE ENTIENDE EN 3°b:

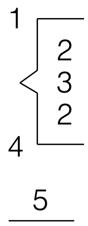
— **UN *CUADRO GENERAL*, QUE INCLUIRÍA TODOS LOS** *elementos primarios* (*minimales*), extenso en *órdenes* "hasta donde fuera posible";

— *cuadros parciales* o *subcuadros* adicionales que comprenderían los *órdenes omitidos*, "a partir de los últimos presentes en el *cuadro general*".

Como signos más recomendables, aparecen:

Tabla 5-40. Signos Braille para representación de cuadros sinópticos

Llaves en *formas curvas*						
Modelo A						Modelo B
0,234	⠎	1	1.er subtipo (no único)	1	⠰⠁	56,1
0,123	⠇	2	Trazo vertical	2	⠸	456,0
5,123	⠐⠇	3	Precedente	3	⠺	2456,0
0,123	⠇	2	Trazo vertical	2	⠸	456,0
0,126	⠣	4	Único subtipo	4	⠘⠄	45,3
5,2	⠐⠂	5	Único subtipo	5	⠐⠂	5,2

Llaves en *formas cuadradas (corchetes)*						
Modelo C						Modelo D
0,1234	⠏	1	1.er subtipo (no único)	1	⠸⠁	456,1
0,123	⠇	2	Trazo vertical	2	⠸	456,0
5,123	⠐⠇	3	Precedente	3	⠺	2456,0
0,123	⠇	2	Trazo vertical	2	⠸	456,0
0,1236	⠧	4	Último subtipo (no único)	4	⠸⠄	456,3
5,2	⠐⠂	5	Único subtipo	5	⠐⠂	5,2

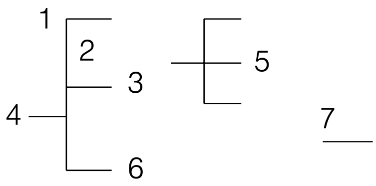
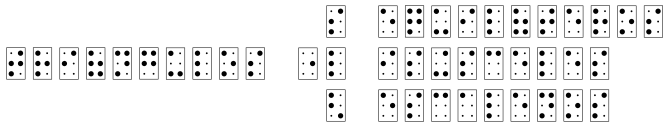
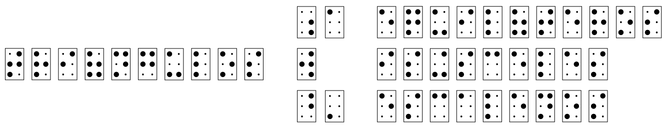
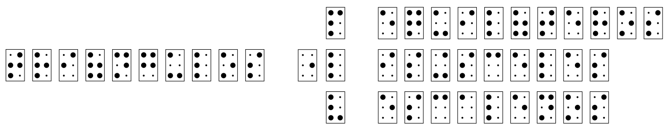
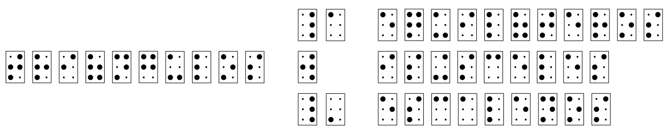
Llaves en *formas cuadradas (corchetes)* con *señalamiento de subtipos*						
Modelo E						Modelo F
0,235	⠖	1	1.er subtipo (no único)	1	⠰⠂	56,2
0,123	⠇	2	Trazo vertical (sin subtipo)	2	⠸	456,0
0,1235	⠗	3	Trazo vertical (con subtipo)	3	⠸⠂	456,2
5,123	⠐⠇	4	Precedente (sin subtipo)	4	⠺	2456,0
5,1235	⠐⠗	5	Precedente (con subtipo)	5	⠺⠂	2456,2
0,125	⠓	6	Último subtipo (no único)	6	⠘⠂	45,2
5,2	⠐⠂	7	Único subtipo	7	⠐⠂	5,2

Tabla 5-41. Ejemplo de versiones de cuadro sinóptico. Clasificación de triángulos

Formas curvas	Modelo A 
	Modelo B 

Formas cuadradas	Modelo C 
	Modelo D 

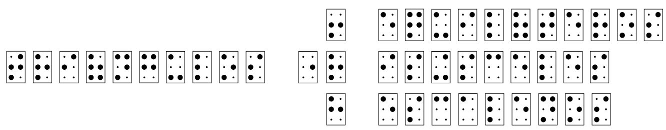
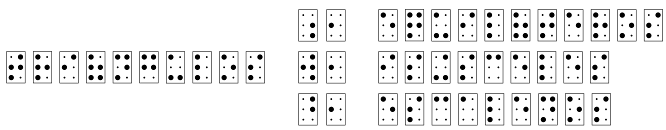
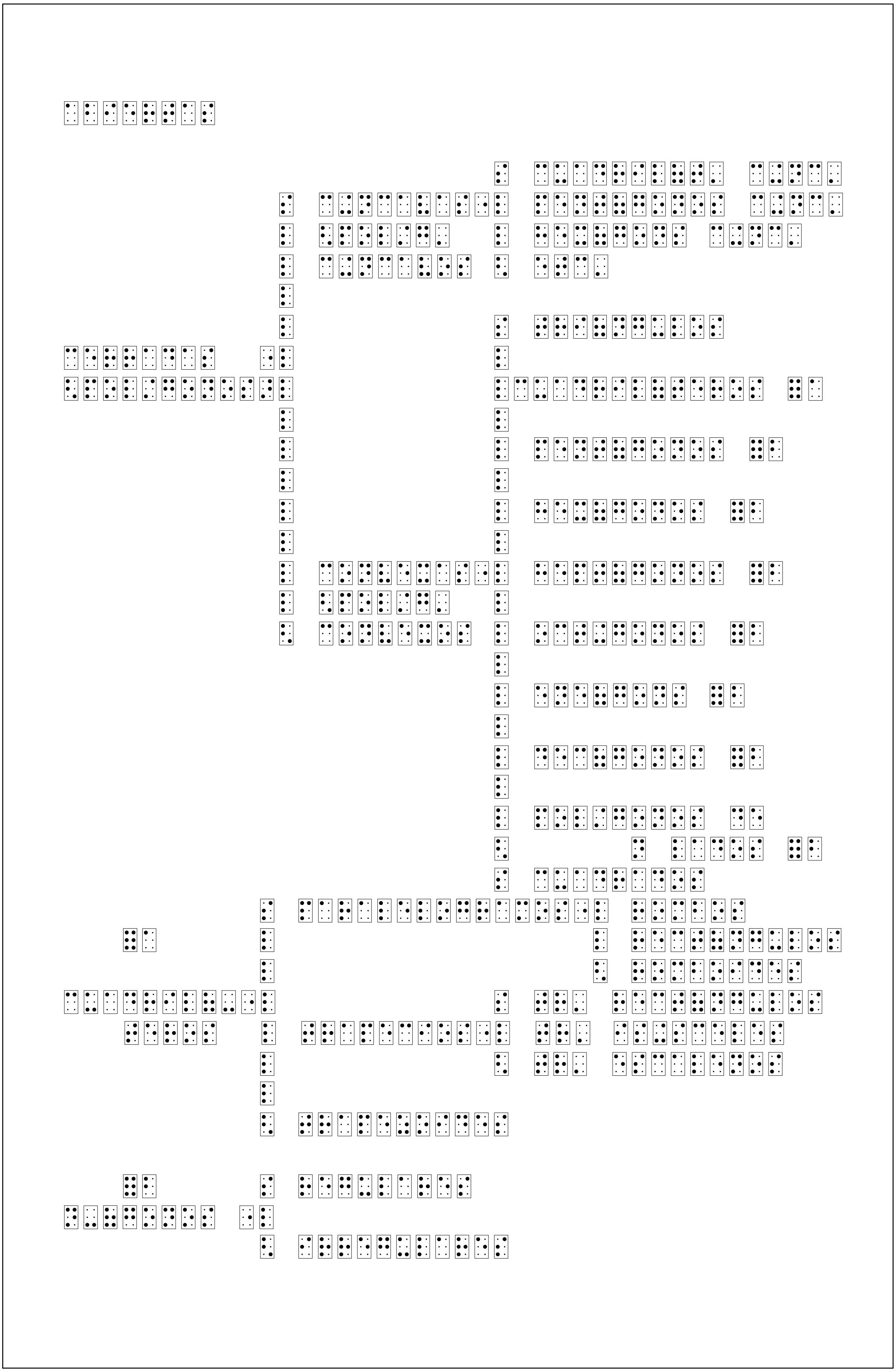
Formas cuadradas con indicador de subtipos	Modelo E 
	Modelo F 

Tabla 5-42. Clasificación de poligonales planas

- Abiertas
- cerradas (polígonos)
  - cóncavas (polígonos cóncavos)
    - cuadriláteros cóncavos
    - pentágonos cóncavos
    - hexágons cóncavos
    - etc.
  - convexas (políg.)
    - triángulos
      - equiláteros
      - isósceles
      - escalenos
    - cuadriláteros
      - paralelogramos
        - cuadrados
        - rombos
        - rectángulos
        - romboides
      - trapecios
        - trap. Rectángulos
        - trap. Isósceles
        - trap. Escalenos
      - trapezoides
    - pentágonos
      - regulares
      - no regulares
    - hexágonos
      - regulares
      - no regulares
    - heptágonos
    - octónos
    - eneágons
    - decágonos
    - polígonos de n lados



5.6. **ESTRUCTURAS DINÁMICAS O DE CONCEPTOS**

Entendemos por tales las representaciones que pretenden plasmar estructuras lógicas determinadas por:

1º Un conjunto de términos o expresiones que designan estados, acciones o elementos de cualquier tipo, y que suelen expresarse mediante figuras geométricas, delimitaciones lineales, caracterizaciones tipográficas o incluso símbolos, que, a su vez, determinan subclases.

2º Un conjunto de órdenes o nexos lógicos, que suelen representarse mediante *flechas* o *trazos* con algún género de indicación o valoración explícita o convencional.

Pueden considerarse un tipo de *grafos generales* —en alguna forma, también *generalización* de los más conocidos—, en los que los *vértices* o *elementos* y las *flechas* incluyen formas geométricas, texto suplementario, caracterizaciones por trazo o color, etc.

Los ejemplos más comunes en los niveles de la educación obligatoria son los *diagramas de flujo* y *mapas conceptuales*. En estas páginas sólo estudiaremos la adaptación al Braille con máquina Perkins de los primeros, por su aplicación directa en Matemáticas.

DIAGRAMAS DE FLUJO

Son expresiones gráficas de *algoritmos* o *procesos lógicos*:

"Conjunto finito de operaciones lógico-matemáticas estructuradas temporalmente, y que conducen a un resultado cierto y único para cada conjunto de datos iniciales."

Su aplicación principal surgió como expresión gráfica de *procesos informáticos*, previa a su traducción a un determinado *lenguaje de programación*. Pero muy pronto se utilizaron como presentación en lenguaje gráfico-geométrico de operaciones matemáticas más o menos complejas, en las que se detallaban las operaciones elementales en que podía descomponerse el proceso general, casos posibles, iteraciones, soluciones, etc. (ver ejemplos más abajo).

Fruto unas veces de convenios generalmente aceptados, del uso común, otras, en los *diagramas de flujo* se distinguen aspectos que nos servirán de guía en el tratamiento de su confección Braille:

— clasificación y caracterización de *operaciones elementales*;

— determinación del *flujo lógico* u orden en que deben ejecutarse o considerarse dichas *operaciones*;

— niveles de concreción operatoria y configuración global.

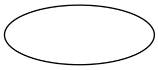
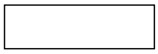
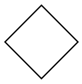
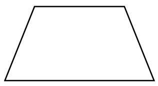
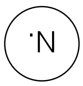
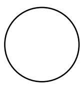
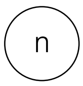
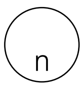
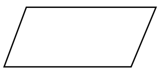
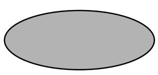
OPERACIONES ELEMENTALES

Designamos así a cada una de las *operaciones*, *pasos* o *items* en que se considera descompuesto el *proceso global*. Su carácter es función de la naturaleza del proceso, objeto, datos de partida, dominio operatorio (ínfimo y máximo).

Su *nivel de análisis* o *nivel de concreción*, está íntimamente ligado a los presupuestos operatorios. Así, por ejemplo, el cálculo de "una potencia de base y exponente enteros positivos" puede considerarse como *operación elemental*, pero también como *subproceso* o *proceso global* en el que se calculara como “producto reiterado de la base”; o el producto como “adición reiterada”; o ésta como “suma reiterada unidad a unidad”... Un *subproceso iterativo* sería descomponible, mediante el incremento de una unidad en cierta *variable-índice* y su evaluación antes o después de haber realizado las *operaciones elementales* a las que se refiere el *subproceso*.

La diferenciación representativa se expresa mediante figuras geométricas, en cuyo interior se describe sintéticamente el contenido de la acción. He aquí algunas de las más frecuentes:

Tabla 5-43. Figuras/símbolos más frecuentes en diagramas de flujo

Significado	**Figura**	**Braille**	
		Símbolo	**Códigos**
Principio		⠪⠭⠕	246,1346,135
Entrada de datos		⠯	12346
Acción/operación elemental		⠯	12346
Alternativa lógica		⠪	246
Opción múltiple		⠐⠪	5,246
Inicio de proceso iterativo		⠫	1246
Fin de proceso iterativo		⠮	2346
Remisión a subrutina		⠸⠯	456,12346
Fin de subrutina		⠸⠽	456,13456
Conector de proceso		⠣	126
Continuar proceso		⠜	345
Presentar resultado		⠠⠮	6,2346
Fin		⠪⠿⠕	246,123456,135

Los signos Braille que se proponen son completamente convencionales: tan válidos serían éstos como cualesquiera otros. Aquí se ha seguido un criterio de *similitud geométrica*, a la par que se atiende a su *discriminabilidad táctil* y se procura respetar —como parte suya— los signos aceptados oficialmente para representar las mismas o análogas figuras en Geometría (ver Sección 4.5).

Las expresiones simbólicas o literarias que en tinta se encierran en dichas figuras, en Braille se yuxtaponen al signo convencional. No cabe riesgo de interpretar el correspondiente signo como *parte de la expresión encerrada* —en su caso—, ya que aquél siempre se hallará precedido de espacios en blanco o principio/fin de flecha.

Si la expresión fuera de tamaño tal que pudiera distorsionar el esquema global del diagrama —dificultando, por tanto, la generación de una representación interior sintética—, se sustituiría por un número o letra —distinta de las variables empleadas—, y se adjuntaría su significado cual *clave* o *nota al pie*. Aunque todos los *procesos elementales* fueran sustituidos.

DETERMINACIÓN DEL *FLUJO LÓGICO*

Se entiende por tal la estructura lógica y temporal de las diferentes *operaciones elementales* en que se ha dividido el *proceso global*.

Se expresa gráficamente mediante *flechas* o *trazos orientados*. Puede decirse que tan sólo se emplea un tipo único (*flecha simple*) (algo que simplificará "de entrada" la representación Braille. Sin embargo, las *alternativas lógicas* y *múltiples* aparecen afectadas por los diferentes resultados de la correspondiente evaluación; es decir: se trata de *flechas evaluadas*:

Tipos o evaluaciones de flechas en diagramas de flujo

Operación	Representación	Evaluación o significado
Alternativa lógica	$\xrightarrow{\text{sí}}$	cuando **sí**, ir a
	$\xrightarrow{\text{no}}$	cuando **no**, ir a
Opción múltiple	$\xrightarrow{\text{n}}$	cuando **n**, ir a
(otras)	$\longrightarrow$	ir a

Teniendo presente que:

— una *alternativa lógica* sólo tiene dos salidas: **sí** o **verdadero,** y **no** o **falso;**

— una *alternativa múltiple* (mejor, en castellano: *opción múltiple*) tiene un número finito de salidas —inferior a 256—, conforme a los valores que pueda tomar la variable evaluada;

— la operación *fin* finaliza el proceso: carece por tanto de salidas;

— cualquier otro tipo de operación, sólo tiene una salida: *ir a*, dirigida a la *siguiente operación a realizar*.

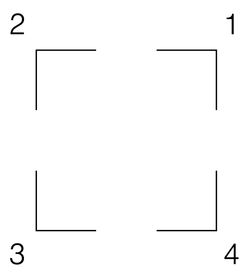
Como signos Braille más sencillos —cómodos de escribir—, se sugieren:

Tabla 5-44 Signos para la representación Braille de flechas en diagramas de flujo

Flechas simples (dirección y sentido del flujo)				
	Tinta	← →	↓ ↑	↓ ↑
Braille	Repres.	Horizontales	Verticales: Modelo a	Verticales: Modelo b
		⠒⠂ ⠐⠒	⠸⠄ ⠸⠁	⠠⠇ ⠈⠇
	Códigos	25,2 5,25	456,3 456,1	6,123 4,123

Flechas *valoradas* (altern. y opciones)			
Tinta		sí ← no → x →	sí ↓ ↑ no
Braille	Repres.	Horizontales	Verticales
		⠒⠒⠂ ⠎ ⠎⠒⠂ ⠒⠒⠂ ⠝ ⠝⠒⠂ ⠍ ⠒⠒⠂	⠍ ⠎⠸⠄ ⠸⠁⠝
	Códigos	234;25,. 235,25,. 1345;25,. 1345,25,. .;25,.	234,456,. 456,.,1345

Cambio de dirección						
Modelo A				Modelo B		
25,236	⠒⠦	1		1	⠒⠆	25,23
56,25	⠰⠒	2		2	⠖⠒	235,25
45,25	⠘⠒	3		3	⠓⠒	125,25
25,245	⠒⠚	4		4	⠒⠃	25,12



Dada la abundancia de espacios vacíos, la evaluación, en su caso, se sitúa en línea inmediata superior o inferior —para las *flechas horizontales*—, a derecha o izquierda —para las *flechas verticales*—. Si para las primeras supone un mayor trabajo (cambio de línea), para las segundas economiza líneas en el total del diagrama.

CONFIGURACIÓN GLOBAL DEL DIAGRAMA

Tal como se indicaba más arriba, el *nivel de concreción* o de *análisis* se refiere, en principio, a los *presupuestos operatorios*, integrados en las *operaciones elementales*. Es decir: estará condicionado por la "*capacidad de interpretación y cálculo* (de cualquier tipo) esperable en el *lector*"; o fruto de la "intención y capacidad de síntesis del *autor*".

Su repercusión gráfica fundamental será la de un mayor o menor número de *procesos elementales*; por tanto: *longitud* y *superficie* totales. Pero esto puede implicar también alteraciones en su *geometría* o *configuración global*, ya que un *proceso elemental* puede sustituir todo un enjambre subyacente de alternativas y recurrencias que, si quiere expresarse en forma *compacta*, obligará a *derivaciones* o *llamadas*, que reduzcan la *longitud total*, conforme con las dimensiones de la página o espacio de representación.

Aunque no alcancen el calificativo de *leyes*, el trazado (en tinta) de *diagramas de flujo* suele amoldarse a ciertas *reglas preferentes*:

a) Las únicas direcciones —con sus dos sentidos opuestos— empleadas para las *flechas* son la *horizontal* y *vertical*. En todo caso, se recurre a composiciones poligonales de éstas. Se admite, no obstante, la licencia para las *opciones múltiples* de más de tres salidas (como *rayos* de la correspondiente figura).

b) Las *flechas* —o *poligonales*— no pueden cruzarse. En caso necesario, se recurre a *conectores de proceso*, indicadores de *saltos de diagrama*, unívocos.

c) Las *subrutinas* o *procesos parciales* —que se repiten a lo largo del *proceso global*— se representan como *diagramas parciales independientes*, a los que se invoca mediante la oportuna llamada *—remisión a subrutina—* ejecutada ésta, se retorna al *proceso principal* mediante *fin de subrutina* en el punto en que éste se interrumpió.

d) El *proceso principal —subrutinas* aparte— tiende a tomar una forma lineal —generalmente: vertical—, cuyos extremos son *principio* y *fin*.

Como puede observarse, todas ellas son trasladables al diseño en Braille con máquina Perkins, salvo la "licencia de oblicuidad" para salidas de *opciones múltiples*. Pero incluso esta última se subsana, gracias a lo indicado en a).

Si el tamaño/longitud del diagrama excede la página Braille, puede optarse por dos soluciones:

— recurrir a un esquema en "zig-zag", aun a costa de quebrar la pretendida *linealidad*;

— marcar un *conector de proceso*, y proseguir en la misma página, en paralelo, o en página posterior.

Es evidente que un cierto proceso puede ser representado por diversos *diagramas de flujo*, que diferirían bien en la distribución espacial y estructura de sus figuras y flechas, bien en la agrupación de operaciones elementales (v. gr.: sustitución de una *opción múltiple* por una serie de *alternativas lógicas*, un *proceso iterativo* por modificación de una variable y evaluación como *alternativa lógica*, etc.).

En la elaboración del *diagrama de flujo* correspondiente a un proceso o algoritmo pueden distinguirse —como ocurría para los *cuadros sinópticos*— fases bien diferenciadas:

1ª Descripción pormenorizada de las *etapas* o *procesos elementales* y estructuración lógico-temporal;

2ª Diseño del diagrama propiamente dicho.

En este caso, sin embargo, cobra mayor importancia la fase constructiva, pues de ella se derivan las *figuras* correspondientes al carácter de cada etapa y la organización geométrica y de *flechas* definida por la estructuración temporal. La configuración global apenas tiene repercusiones de evocación, salvo la posición relativa de figuras y *bucles* (*procesos iterativos*), derivaciones de *alternativas lógicas* y *opciones múltiples*, etc.

Análogamente a cómo se recomendaba para los *cuadros sinópticos*, puede recurrirse a una "clasificación decimal" de *procesos elementales*:

Cálculo del m.c.d. de dos números (Algoritmo de Euclides)

Clasificación decimal de procesos elementales

1 tomar como **a** el mayor de los números, y como **b** el menor
2 dividir **a** entre **b**, y llamar **r** al resto
3 fijarse en el resto **r**: ¿es **r** = 0?
3.1 si el resto **r** es 0: hemos terminado: **b** es el m.c.d. buscado
3.2 si el resto **r** no es 0:
4 **a** pasa a valer **b**, y **b** pasa a valer lo que era **r**
5 volver a hacer la división entre lo que ahora son **a** y **b**

1 → 2
2 → 3
3 – sí → 3.1 → fin
3 – no → 3.2 → 4 → 5 → 2

Resolución de ecuaciones de primer grado

Clasificación decimal de procesos elementales

1 escribir la ecuación
2 ¿tiene denominadores?
2.1 sí:
2.2 no:
2.1 hallar el m.c.m. **m** de los denominadores
3 multiplicar por **m** toda la ecuación
4 simplificar
5 ¿existen paréntesis?
5.1 sí: romper paréntesis
5.2 no:
6 pasar al primer miembro todos los términos que contengan a la variable, y al segundo los términos independientes
7 reducir términos semejantes en cada miembro
8 ¿quedan incógnitas en el primer término?
8.1 sí: despejar la incógnita
8.2 no:
8.1.1 hemos terminado: la ecuación tiene una única solución, que es...
9 ¿queda una igualdad?
9.1 sí: hemos terminado: la ecuación tiene muchas soluciones
9.2 no: hemos terminado: la ecuación no tiene solución

1 → 2
2 – sí → 2.1 → 3 → 4 → 2.2
2 – no → 2.2 → 5
5 – sí → 5.1 → 2
5 – no → 5.2 → 6
6 → 7 → 8
8 – sí → 8.1 → 8.1.1 → fin
8 – no → 8.2 → 9
9 – sí → 9.1 → fin
9 – no → 9.2 → fin

La fase de *elaboración del diagrama* propiamente dicha es ahora una *traducción* a figuras y trazado de las oportunas flechas arriba indicadas. El bosquejo resultante quedará, muy posiblemente, pendiente de ulteriores retoques en su distribución espacial.

DISEÑO/REPRESENTACIÓN BRAILLE DE *DIAGRAMAS DE FLUJO*

Criterios de simplificación y configuración

1º Determinaciones y diseño previos:

a) *Datos* necesarios y *variables* que los contendrán.

b) *Resultados a alcanzar*, que finalizarán el proceso.

c) Reducción del *proceso global* a *fases* o *procesos parciales*, y ordenación temporal.

d) Análisis de los *procesos parciales* hasta el nivel de *procesos elementales* (*operaciones simples* a representar en el diagrama).

e) *Pasos* o *estadios* susceptibles de ser considerados *alternativas lógicas* u *opciones múltiples*.

f) *Subprocesos reiterados* para una cierta variable.

g) *Subprocesos repetidos* en diversos lugares.

2º Establecimiento de *relaciones de flujo lógico* entre *procesos elementales* o *subprocesos* (futuras *flechas* y sus *valoraciones*).

3º Diseño de una *configuración global*. Que supone:

— Determinar los *procesos elementales* (eventualmente: *invocación a subrutinas*), que integrarán definitivamente el *proceso principal*.

— Cálculo de la *longitud Braille* del *proceso principal*. Teniendo en cuenta: estados *inicio* y *fin*, y líneas intermedias para *flechas* (una por *proceso elemental*).

— En caso de exceder este *tamaño* la dimensión vertical de la página Braille: decisiones de configuración en zig-zag, partición, etc., y puntos de *cambio de dirección* o *interrupción*, posible emplazamiento de los diferentes segmentos, etc.

— Emplazamiento de las *subrutinas*. A ser posible, próximas a su *primera invocación*.

4º Representación de los *procesos elementales* y *subprocesos*, y de las *flechas* que los ligan.

Para cada *proceso elemental* (siguiendo su *ordenación temporal*):

— Determinación y representación del *símbolo*, conforme a su *carácter* o *tipo*.

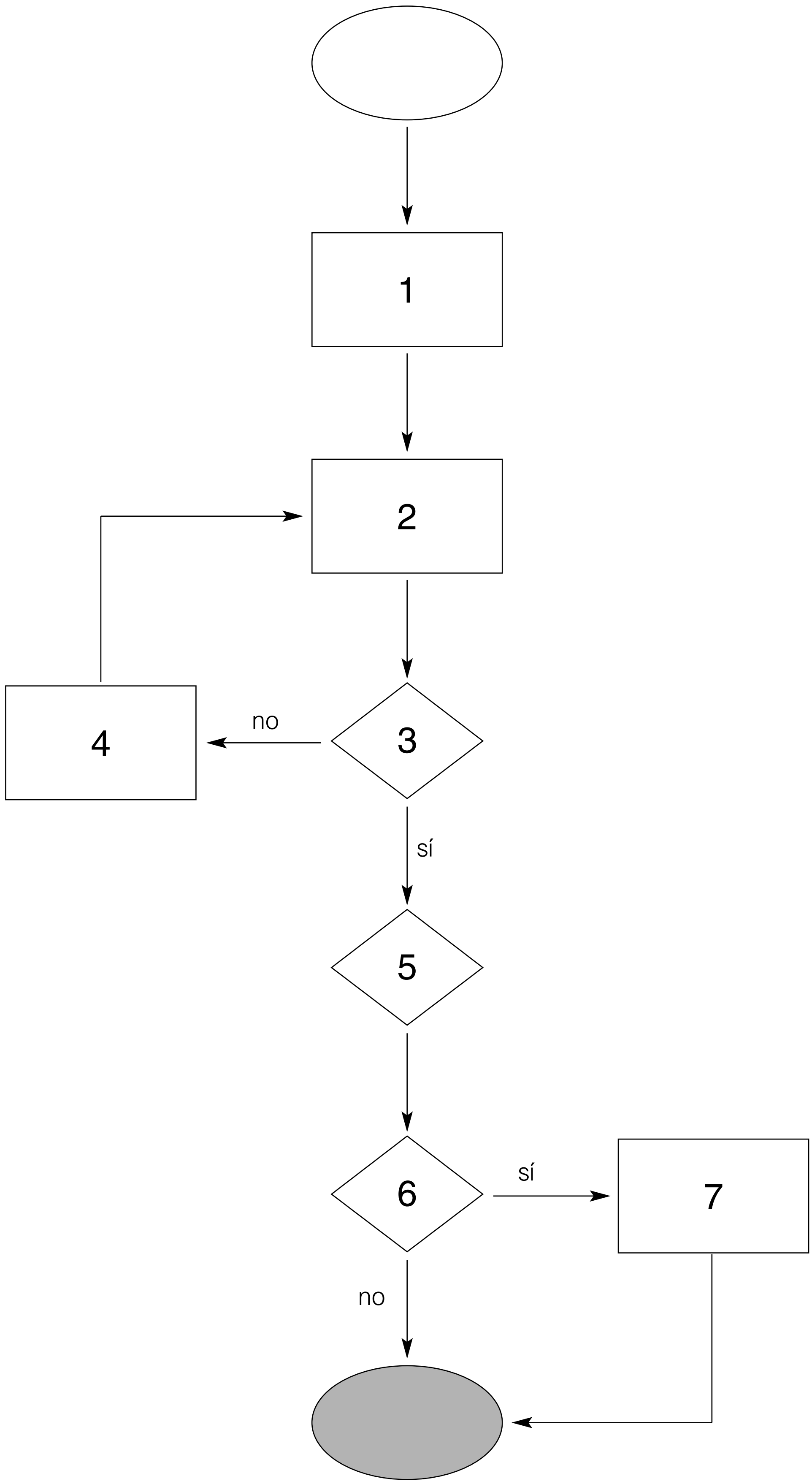
— Reducción a forma sintética (literal o simbólica) de su expresión descriptiva. Posible decisión de sustituirla por una *llamada* a expresión adicional en la *clave*; de no ser así: *representación íntegra*.

— Trazado de las *flechas* que tengan dicho *proceso elemental* como *destino* respecto de otros ya representados.

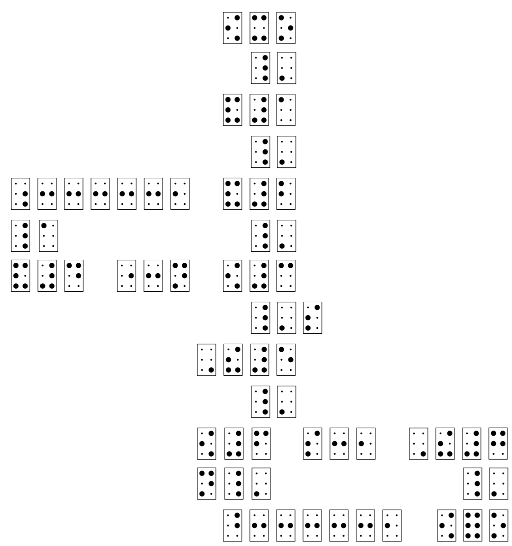
— Ídem para el *proceso elemental* inmediatamente subsiguiente en la *ordenación temporal prevista*.

5º Adición de *subrutinas* —en su caso—, siguiendo las indicaciones de 4º.

Tabla 5-45. Diagrama de flujo para el algoritmo de Euclides (obtención del M.c.d. de dos números)



1 llamar “a” y “b” a los números dados
2 dividir “a” entre “b” (división entera)
3 ¿el resto es 0?
4 llamar ahora “a” a lo que era “b” (el divisor anterior),
y “b” (nuevo divisor) al resto obtenido
5 resultado: “el M.c.d. es ”b” (último divisor)
6 ¿es “b” = 1?
7 resultado: “Los números son primos entre sí.”



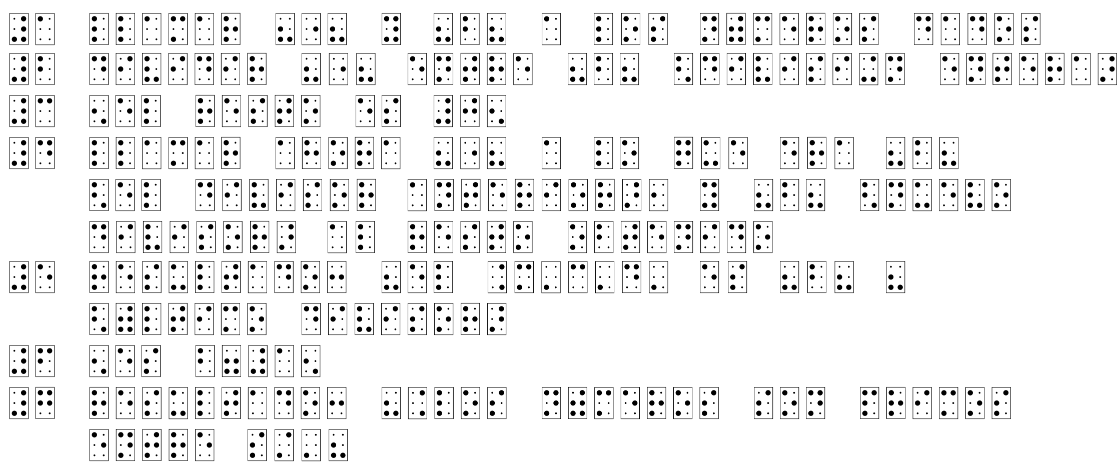
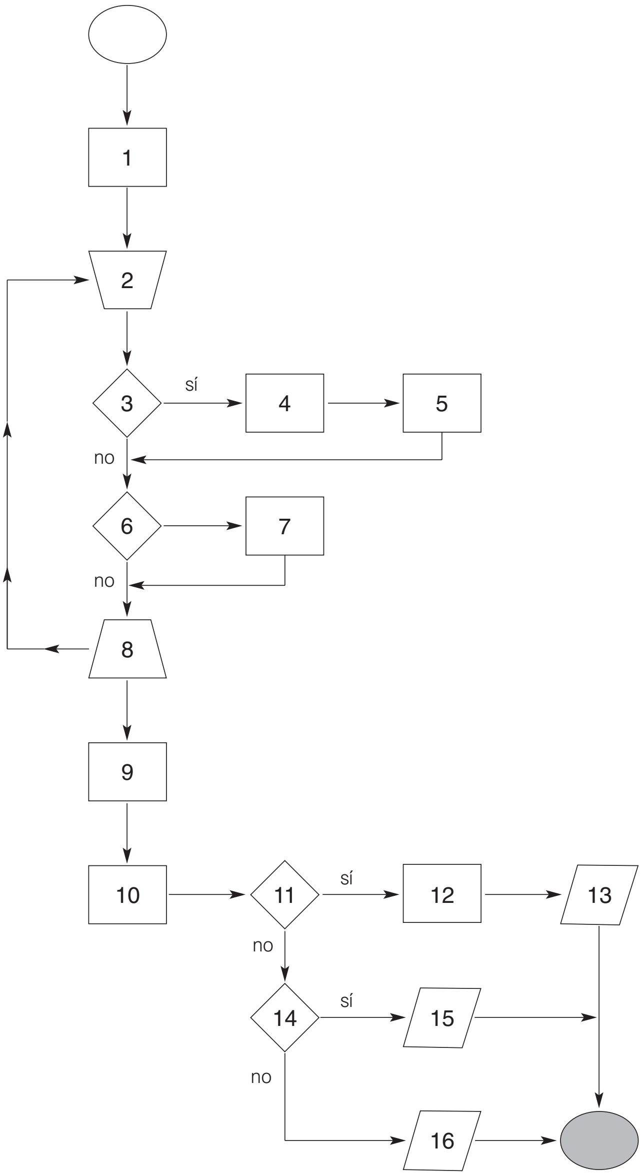
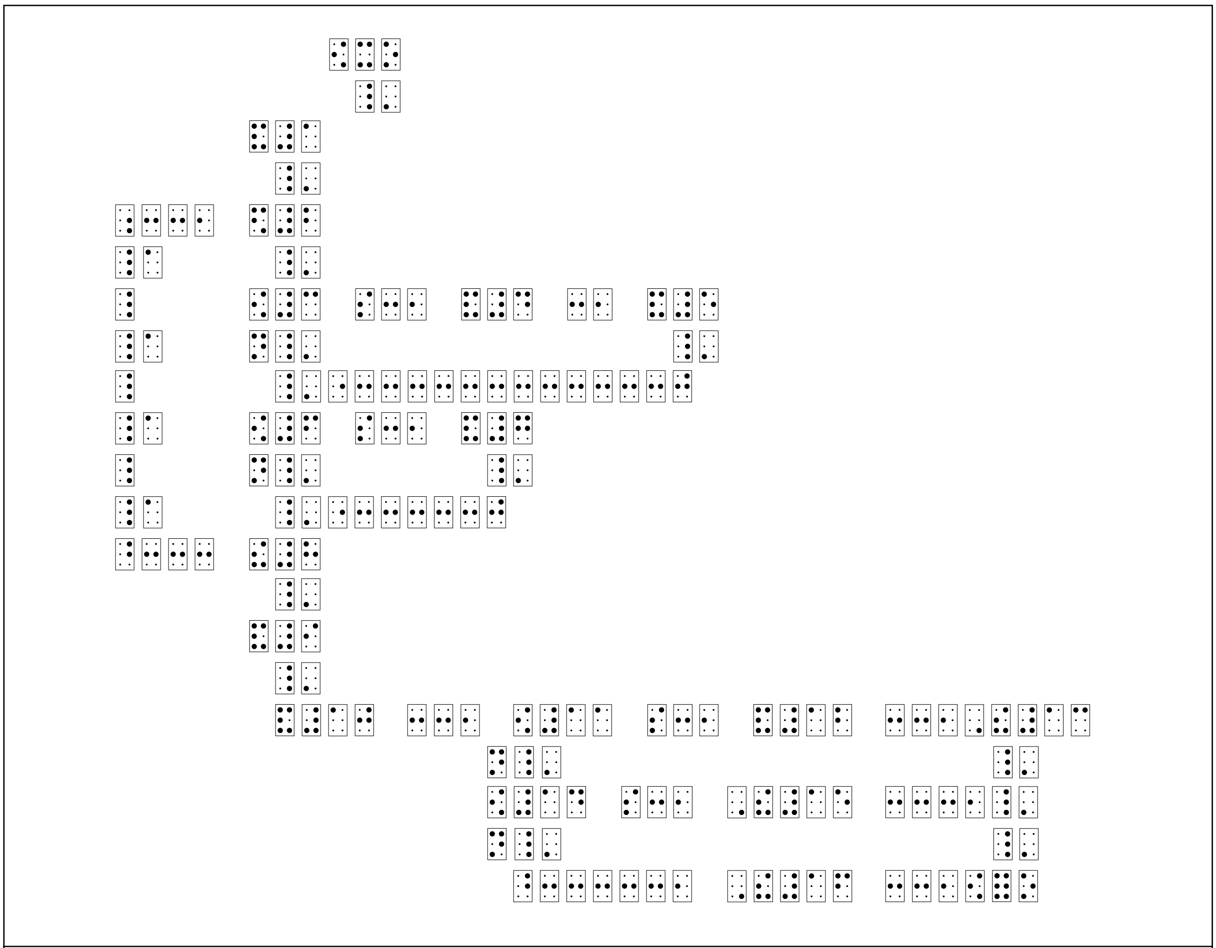


Tabla 5-46. Resolución de ecuaciones (de primer grado, en una incógnita)



1 escribir la ecuación
2 mientras queden denomin. o paréntesis
3 ¿hay denominadores?
4 hallar el m.c.m. de los denominadores
5 multiplicar por él toda la ecuación
6 ¿hay paréntesis?
7 romper paréntesis
8 si hay denom. o parént., vuelve a 2
9 pasar a un mismo miembro todos los términos con x (incógnita), y al otro todos los términos independientes
10 simplificar (reducir térm. semej.)
11 ¿quedan x (incógnita)?
12 dividir la ec. por el coefic. de x
13 resultado: "la solución es: x = ..."
14 ¿resulta una igualdad?
15 resultado: "Indeterminación: la ecuación tiene infinitas soluciones."
16 resultado: "Incompatible: la ecuación no tiene soluciones."



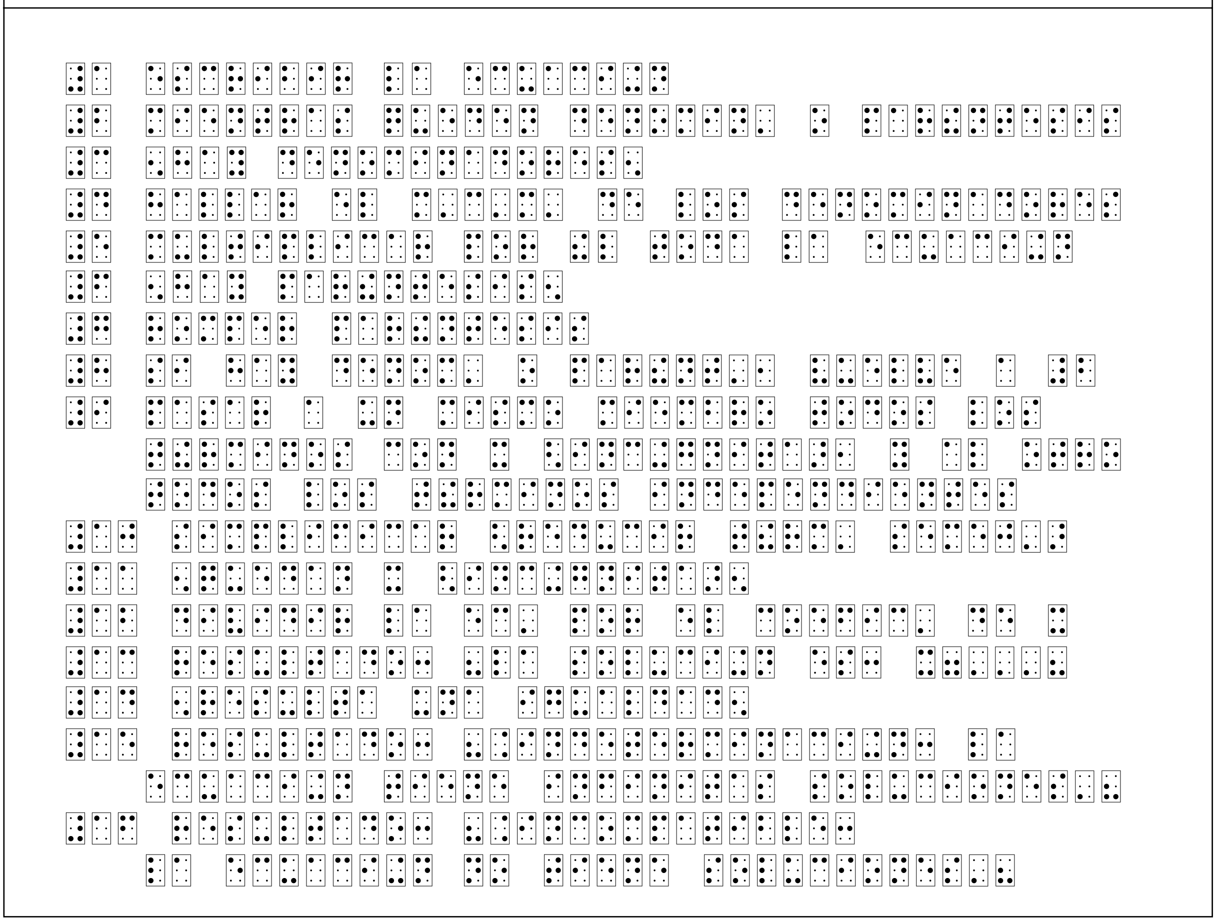


TABLA DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS

Concepto		Cap./Sección/Apart.
Abecedario latino		2.1
Abscisa	(representaciones cartesianas)	5.3.1
Adición	Aritmética	1.2
	de vectores	3.3
Aislado,	Elemento	(ver: elemento aislado)
Alef	(cardinales transfinitos)	2.6.2
Alfabeto griego		2.1
Algoritmo	de Euclides (M.c.d.)	1.2.1
	de Ruffini (división de polinomios)	2.5A
	general (diagramas de flujo)	5.6.1
Algoritmo para la adición	de expresiones decimales	1.2.3
	de fracciones enteras	1.2.2
	para la adición de medidas de ángulos	1.4.1
	números enteros	1.2.1
Algoritmo para la división	de expresiones decimales	1.2.3
	de fracciones enteras	1.2.2
	de la medida de un ángulo por un escalar	1.4.1
	de polinomios con divisor de la forma x-a	2.5A
	de números enteros	1.2.1
	general de polinomios	2.5A
Algoritmo para la multiplicación	de expresiones decimales	1.2.3
	de fracciones enteras	1.2.2
	de la medida de un ángulo por un escalar	1.4.1
	de polinomios	2.5B
	de números enteros	1.2.1
Algoritmo	para la obtención del M.c.d.	1.2.1
Algoritmo para la sustracción	de expresiones decimales	1.2.3
	de fracciones enteras	1.2.2
	de medidas de ángulos	1.4.1
	de números enteros	1.2.1
And	(conjunción lógica, “y”, “&”)	2.6.2
Ángulo	(en general)	3.1
	Orientado	3.1
	Recto	3.1
Antecedente	(cuadros sinópticos)	5.5.2B
	(diagramas en árbol)	5.5.2A
	(grafos)	5.5.1
Anterior	(relaciones de orden)	2.6.2
Antilogaritmo	(función)	2.6.1
Aplicación	(notación)	2.6.1
	(grafo)	5.5.1
	(tablas/diagrama cartesianas)	
	Biyectiva	2.6.1

Concepto		**Cap./Sección/Apart.**
Grafo (cont.)	Elemental	5.5.1
	General	5.5.1
Histograma	(representaciones cartesianas)	5.3.3
Idéntico a	(definición de funciones)	2.6.1
Igualdad	algebraica	2.3
	aritmética	1.2
Imagen	de una función (conjunto)	5.2.1
	de un elemento	5.2.1
Implicación	lógica (si..., entonces)	2.6.2
Inclusión	(conjuntos)	2.6.2
Índice	(afectando letra-base)	2.1B
	de productorio	1.3
	de sumación	1.3
	de una raíz	2.1D
Inecuación		2.3
Ínfimo		(ver: elemento mínimo)
Infinito		2.6.2
Integral	definida (funciones)	2.6.1
	doble (funciones)	2.6.1
	indefinida (funciones)	2.6.1
Intersección	(de conjuntos)	2.6.2
	(de una familia de conjuntos)	2.6.2
Intervalos	en una recta (diagramas lineales)	5.1
Inyectividad	(de una función)	5.2.1
Ley	de composición interna	2.1
	de definición de una función	2.6.1
Límite	de una función	2.6.1
	de una sucesión	2.6.1
	inferior	2.6.1
	por la derecha	2.6.1
	por la izquierda	2.6.1
	superior	2.6.1
Líneas	(tablas y cuadros)	4
Llaves	(notaciones; oper. numéricas y algebraicas)	1.2
	(cuadros sinópticos)	5.5.2B
Logarítmica	(función)	2.6.1
Logaritmo	decimal	1.1A
	(general)	1.1A
	neperiano	1.1A
Mantisa	(logaritmos)	1.1A
Mapa	Conceptual	5.6.2
	de Karnaugh	5.2.2
Marca	(tipográfica)	2.1B
Marcado	de puntos (diagramas lineales)	5.1

Concepto		**Cap./Sección/Apart.**
Matriz	(distribución bidimensional)	4.3.1
	fundamental de puntos (plano cartesiano)	5.3.1
Maximal		(ver: element. maximales)
Máximo		(ver: elemento máximo)
Medida	(en general)	1.4
	de un ángulo	1.4.1
	de una magnitud físico-química	1.4.2
Miembro	(de una ecuación/inecuación)	2.3
Minimal		(ver: elemento minimal)
Mínimo		(ver: elemento mínimo)
Minuto	centesimal	1.4.1
	sexagesimal	1.4.1
Módulo	de un vector	3.3
	de acceso (tablas y cuadros)	4.1.3
Monomio		2.1
Multiplicación	de expresiones decimales	1.2.3
	de fracciones enteras	1.2.2
	de la medida de un ángulo por un escalar	1.4.1
	de números enteros	1.2.1
	de polinomios	2.5B
	de un vector por un escalar	3.3
Múltiplo	(unidad)	1.4
Negación	lógica (“no”, “not”) (Lógica)	2.6.2
No	(negación lógica, “not”)	2.6.2
no existe	(cuantificadores, Lógica)	2.6.2
Not	(negación lógica, “no”)	2.6.2
Numeración	arábiga	1.1A
	romana	1.1D
Numerador	(fracciones enteras)	1.1B
	(en general) 2.1C	2.2
Número	combinatorio	1.3
	con coma	1.1A
	entero	1.1A
	fraccionario	1.1B
	natural	1.1A
	ordinal	1.1C
	romano	1.1D
O	(disyunción lógica, “or”)	2.6.2
Opción	múltiple (diagramas de flujo)	5.6.1
Operación	(ley de composición interna)	2.2
	aritmética	1.2
	elemental (diagramas de flujo)	5.6.1
Operador	“laplaciana” (funciones)	2.6.1
	“nabla” (funciones)	2.6.1