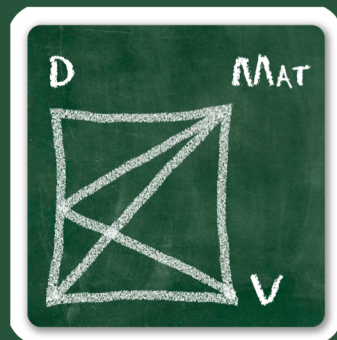




DISVIMAT

El estudiante ciego dibujando en el aula de Matemáticas

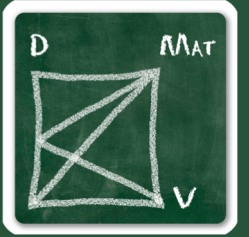
Dibujo sobre lámina de caucho

11. LAS CIRCUNFERENCIAS Y SUS AMIGOS

©José Enrique Fernández del Campo
jefdelcampo@gmail.com
<http://disvimat.net>

Madrid, 2020
Realización: José Antonio Valgañón Sánchez

ÍNDICE



Presentación

11.1 Posiciones relativas de dos circunferencias.

11.1.1 Definiciones y reconocimiento.

11.1.2 Trazado de dos circunferencias en posición relativa dada.

11.2 Posiciones relativas de una recta y una circunferencia.

11.2.1 Definiciones y reconocimiento.

11.2.2 Trazado de recta y circunferencia en posición relativa dada.

11.3 Ángulos en relación con una circunferencia.

11.4 Circunferencias y polígonos.

11.4.1 Circunferencia circunscrita a un polígono.

11.4.2 Circunferencia inscrita en un polígono.

PRESENTACIÓN



Incorporada ha quedado la circunferencia al acervo de las figuras geométricas.

Podría pensarse que es pequeño aporte, cuantitativamente. Pero ha roto la tiranía de las rectas y su cohorte de segmentos rectilíneos.

Aportando algo más que un toque de armonía y perfección inatacable: la relación de distancia. Con sus efectos de intersección, tangencia y separación. Sobre todo el de “tangencia”, novedad exclusiva.

Allí donde aparezca una circunferencia, se plantean inmediatamente los juegos y problemas de “posición relativa”.

Pares de circunferencias jugarán entre sí, ocupando posiciones relativas con vocabulario propio.

Y una circunferencia también, con una recta o con dos (o sea: con un ángulo). Y con polígonos.

Y de estos juegos de posición se aprovechará la Física y la Tecnología.

Porque hay movimientos circulares. Y ruedas lisas y dentadas, de igual o diferente diámetro; embragadas o enlazadas por cadenas y correas, en el mismo o contrarios sentidos.

Pero estos asuntos superan nuestros propósitos, que dijimos eran los de colaborar con el estudiante ciego a dibujar figuras y construcciones geométricas con la ayuda de la lámina de silicona o caucho, lápiz o bolígrafo y unas hojas de papel ordinario.

Nos quedamos en lo puramente geométrico.

Con pocas exigencias hápticas de exploración y reconocimiento. Pero aprovechando la ocasión –por no decir necesidad- de agilizar el trazado de circunferencias, y adquirir nuevas técnicas para hacer frente al recién nacido “problema de la tangencia”: “tocar sin cortar”.



11.1 POSICIONES RELATIVAS DE DOS CIRCUNFERENCIAS.

11.1.1 DEFINICIONES Y RECONOCIMIENTO.

Concepto	Criterio topológico	Criterio métrico
Exteriores	Todos los puntos de cada una son exteriores a los de la otra	La distancia entre sus centros es mayor que la suma de sus radios
Tangentes exteriores	Tienen un punto común, y todos los demás puntos de cada una son exteriores a los de la otra	La distancia entre sus centros es igual a la suma de sus radios
Secantes	Dos puntos comunes, y parte de los puntos de cada una son interiores a los de la otra	La distancia entre sus centros es menor que la suma de sus radios, y mayor que su diferencia
Tangentes interiores	Un punto común, y todos los demás puntos de una de las circunferencias son interiores a los de la otra	La distancia entre sus centros es igual a la diferencia de sus radios
Circunferencia interior a otra	Los puntos de una de las circunferencias son interiores a los de la otra; pero sus centros no coinciden	La distancia entre sus centros es menor a la diferencia de sus radios; pero no nula
Circunferencias concéntricas	Sus centros coinciden, y los puntos de una de las circunferencias son interiores a la otra. La región comprendida entre ambas se llama “corona circular” o “anillo”.	La distancia entre sus centros es nula y sus radios son distintos
Circunferencias coincidentes	Sus centros coinciden, y los puntos de cada una pertenecen a la otra	La distancia entre sus centros es nula y sus radios iguales

(Exteriores: no pertenecen, ni a la circunferencia ni al círculo.)

(Interiores: pertenecen o están incluidos en el círculo.)



Para reconocer en un dibujo la posición relativa de dos circunferencias, pueden emplearse varias técnicas:

- Recorrer las circunferencias con manos distintas, localizando los puntos comunes o más próximos.
- Recorrer una de las circunferencias con una mano, intentando localizar puntos comunes con la otra. Y recorrer después la segunda, explorando la separación entre los puntos de ambas (constatando si es constante o variable).

11.1.2 TRAZADO DE DOS CIRCUNFERENCIAS EN POSICIÓN RELATIVA DADA.



Para trazar dos circunferencias cuya posición relativa se indique, pueden emplearse itinerarios muy semejantes:

a) Circunferencias tangentes y secantes, exteriores o interiores.

1º) Determinar los puntos más significativos de ambas según la posición relativa señalada:

para las tangentes, el punto común;

Para las exteriores e interiores, los dos que resultarán más próximos;

para las secantes, los más próximos al centro de la otra. (Si se dieran los puntos intersección, se encuentran en su mediatriz.)

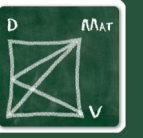
Determinan la recta que contendrá los centros. Salvo para las tangentes, cuya dirección deberá decidirse entonces-.

2º) Si no vienen dados, determinar el radio, diámetro o tamaño aproximado de cada circunferencia.

3º) Simular el trazado de una y otra circunferencia, partiendo de los puntos determinados en el primer paso y los tamaños recién decididos. Considerando si se ajustarán a las condiciones requeridas.

4º) Trazar las circunferencias; dando preferencia a la de radio menor.

(Si es necesario, desplazando la lámina de caucho, en busca de la “posición preferente” para el trazado de circunferencias.).



b) Circunferencias concéntricas

Sin duda, el caso más difícil, por resultar más evidente una exagerada inexactitud del resultado: “anillo” o “corona” irregular; moviendo a confusión con el caso de “circunferencias interiores”.

- 1º) Determinar el centro común y puntos alineados con él, pertenecientes a una y otra circunferencia (simétricos respecto del centro). Fijan los diámetros y radios.
- 2º) Simular el trazado de las circunferencias, construidas sobre los diámetros de cada una determinados en el paso anterior.
- 3º) Trazar efectivamente ambas circunferencias.

Para las “circunferencias coincidentes”, basta con dibujar una sola. Ya que en dibujo son indistinguibles



11.2 POSICIONES RELATIVAS DE UNA RECTA Y UNA CIRCUNFERENCIA.

11.2.1 DEFINICIONES Y RECONOCIMIENTO.

Conviene fijar el concepto de “distancia de un punto a una recta”:

Dada una recta y un punto exterior a ella, se llama “distancia del punto a la recta” a la longitud o medida del segmento de recta perpendicular por dicho punto.

Para las situaciones que estamos considerando, equivale a trazar –siquiera con la imaginación- el segmento perpendicular entre el centro de la circunferencia y la recta.

Al considerar una recta y una circunferencia, pueden darse tres situaciones o posiciones relativas:

Exteriores.- Recta exterior a la circunferencia: sin puntos comunes.

Distancia del centro de la circunferencia a la recta mayor que el radio.

La perpendicular a la recta por el centro de la circunferencia, la corta en los puntos más próximo y más alejado de la recta, en el mismo semiplano.

Tangentes.- Recta tangente a la circunferencia: Único punto común.

Distancia del centro de la circunferencia a la recta igual al radio.

El radio en el punto de tangencia es perpendicular a la recta.



Secantes.- Recta secante a la circunferencia: Dos puntos comunes.

Distancia del centro de la circunferencia a la recta menor que el radio.

El centro de la circunferencia se encuentra en la mediatriz del segmento determinado por los puntos de intersección.

La técnica más segura para la exploración y determinación de la posición de una recta respecto de una circunferencia es:

1º) Localizar la recta.

Tarea mucho más sencilla que la de localizar la circunferencia.

2º) Seguir la, explorando el dibujo con varios dedos simultáneamente –a ambos lados de la recta-, hasta localizar la circunferencia.

Puede realizarse con una o ambas manos.

3º) determinar si hay o no intersecciones: puntos comunes, dos, uno o ninguno.

Equivale a localizar la circunferencia en uno de los semiplanos, alejada de la recta –exterior- o coincidiendo en un único punto –tangente-. O si la recta “corta” la circunferencia –secante-.

11.2.2 TRAZADO DE RECTA Y CIRCUNFERENCIA EN POSICIÓN RELATIVA DADA.



Con independencia de las exigencias que deba cumplir la línea a dibujar, consideraremos tres tipos de problemas:

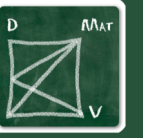
a) Dada o determinada la circunferencia, trazar la recta.

1º) Localizar el punto o puntos comunes, y el de la circunferencia que se supone resultará más próximo de la recta a trazar. Según la condición principal –tangente, secante, exterior-, otras condiciones o posición en la hoja.

2º) Indicar dicho punto de tangencia o de proximidad con la mano libre, de forma que “cubra” o determine la región ocupada por la circunferencia. Si fuera preciso, girar la lámina de caucho, para que la dirección de la recta a trazar se aproxime a la “dirección preferente”;

3º) Trazar la recta pedida, siguiendo la dirección preferente; según la condición principal de posición relativa:

- Exterior: que no alcance la región cubierta por la mano auxiliar.
- Tangente: como unión de dos semirrectas con origen el punto de tangencia.
- Secante: trazando en primer lugar el segmento determinado por los dos puntos de intersección, a prolongar como semirrectas en uno y otro sentido.



b) Dada o determinada la recta, trazar la circunferencia.

- 1º) localizar con la mano auxiliar la posición aproximada de los puntos de la recta que se espera resulten más significativos según la condición principal de intersección, tangencia o más próximo.
- 2º) Desplazar y girar la lámina de caucho hasta que dicho punto o puntos de la recta y el previsible centro de la futura circunferencia queden en la posición preferente para el trazado de circunferencias.
- 3º) teniendo presente el radio (o diámetro) previsto, simular el trazado de la circunferencia que cumpla la condición de posición relativa, antes de trazar finalmente la circunferencia.

c) No se proporciona ninguna de las dos líneas, pero sí las condiciones que deben cumplir.
Al ser más asequible la situación de trazar la recta dada la circunferencia, convendrá dibujar ésta primero, de acuerdo con las condiciones complementarias que pudieran imponérsele, y posición en la zona de dibujo adecuada para el trazado de la recta.



11.3 ÁNGULOS EN RELACIÓN CON UNA CIRCUNFERENCIA.

A título meramente ilustrativo, recogemos estos conceptos clásicos. Aunque no deberán suponer dificultad para su reconocimiento háptico y trazado con la lámina de caucho:

Tipo	Posición del vértice	Lados
Ángulo central	Centro de la circunferencia	Radios
Ángulo inscrito	Punto de la circunferencia	Cuerdas (o secantes)
Ángulo interior	Punto interior de la circunferencia, distinto del centro	Cuerdas (segmentos de cuerdas, o secantes)
Ángulo semiinscrito	Punto de la circunferencia	Una cuerda y una tangente (O una secante y una tangente)
Ángulo exinscrito	Punto exterior a la circunferencia	Tangentes
Ángulo exterior	Punto exterior a la circunferencia	Secantes o secante y tangente

Su medida guarda relación con los arcos determinados en la circunferencia. Caso principal:

- La medida de un ángulo inscrito es igual a la mitad del arco de circunferencia que abarca.

11.4 CIRCUNFERENCIAS Y POLÍGONOS.

11.4.1 CIRCUNFERENCIA CIRCUNSCRITA A UN POLÍGONO.



“Circunferencia circunscrita a un polígono”: la que comprende a todos sus vértices. (“Circun-scrita”: dibujada alrededor.)

También se dice que “el polígono está inscrito en la circunferencia”. (“In-scrito”: dibujado dentro.)

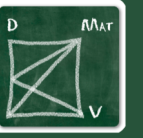
Consideraremos –como más habituales– el caso de polígonos regulares, Y de los que se supondrá se habrá adquirido cierta destreza en su dibujo.

Tres tipos de situaciones genéricas:

a) Dibujado el polígono, trazar su circunferencia circunscrita.

Es preferible:

- 1º) Trazar el arco determinado por tres vértices consecutivos.
- 2º) Girando la lámina de caucho, prolongar ese arco con el vértice contiguo inmediato.
- 3º) Repetir este segundo paso cuantas veces sea necesario, hasta completar la circunferencia.



b) Dada una circunferencia, trazar un polígono de cierto número de lados para el que sea “su circunferencia circunscrita”.

Es muy práctico –se consigue mayor aproximación- hacerlo en dos etapas:

- 1º) Señalar los puntos de tangencia –vértices del polígono-, sirviéndose de las simetrías del polígono y el anteroposterior del cuerpo. Desplazando y girando –si fuera preciso- la lámina de caucho.
- 2º) Trazar cada una de las cuerdas -segmentos lados del polígono-, determinadas por pares de puntos de tangencia consecutivos. (Ídem)

c) Trazar un polígono de un cierto número de lados y su circunferencia circunscrita, sin disponer de dibujo previo, pero sí de condiciones que afecten a uno o a la otra.

En general, es más seguro dibujar primero el objeto que deba cumplir más condiciones. Aunque de ordinario es más cómodo y rápido disponer en primer lugar de la circunferencia.



11.4.2 CIRCUNFERENCIA INSCRITA EN UN POLÍGONO.

“Circunferencia inscrita en un polígono”: tangente a todos los lados del polígono. (“In-scripta”: dibujada dentro.) También se dice que “el polígono está circunscrito a la circunferencia”. (“Circun-scripto”: dibujado alrededor.)

Trataremos –por ser el más habitual- el caso de polígonos regulares. Y de los que se supone adquirida mejor destreza en dibujarlos.

Conviene llamar la atención de que -en este caso- “los puntos de tangencia son los puntos medios de los lados”. Consideremos dos casos para el trazado de la circunferencia inscrita a un polígono:

a) Dado un polígono, trazar su circunferencia inscrita. Es muy útil:

1º) Marcar los puntos medios de todos los lados del polígono.

2º) Trazar el arco de circunferencia determinado por tres de estos puntos de tangencia consecutivos,.

3º) Prolongar ese arco con el punto de tangencia contiguo inmediato. (Girando para ello la lámina de caucho -si fuera preciso-.)

4º) Repetir este segundo paso cuantas veces sean necesarias, hasta completar la circunferencia.

b) Trazar un polígono de un cierto número de lados y su circunferencia inscrita, sin disponer de dibujo previo, pero sí de condiciones que afecten a uno o a la otra.

En general, es más seguro dibujar primero el objeto que deba cumplir más condiciones. Aunque de ordinario es más cómodo y rápido disponer en primer lugar de la circunferencia.