

DISVIMAT

El estudiante ciego dibujando en el aula de Matemáticas

*Dibujo sobre lámina de caucho*

## 5. PARES DE ÁNGULOS RELACIONADOS

*©José Enrique Fernández del Campo*

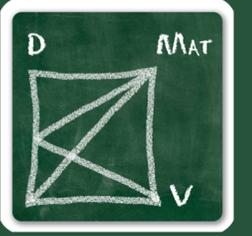
*[jefdelcampo@gmail.com](mailto:jefdelcampo@gmail.com)*

*<http://disvimat.net>*

Realización: *José A. Valgañón Sánchez*

*Madrid, 2019*

# ÍNDICE



Presentación

5.1 Ángulos complementarios.

5.2 Ángulos adyacentes y ángulos suplementarios.

5.3 Ángulos opuestos por el vértice.

5.4 Ángulos en la intersección de dos rectas.

5.5 Cuando una recta corta dos paralelas.

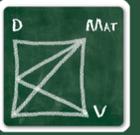
5.6 Bisectriz de un ángulo.

5.7 Aproximación al trazar una bisectriz.

5.8 Otros Ángulos de interés.

5.9 Consideraciones sobre el empleo de marcas gráficas ordinarias.

5.10 Observaciones.



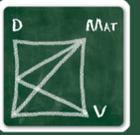
## PRESENTACIÓN

La relación entre ángulos complementarios inaugura una colección de relaciones entre pares de ángulos en función de su posición relativa y en función de la medida. Es el contenido principal de esta serie. Relaciones fáciles de visualizar, complicadas de verbalizar.

Con un tributo tradicional a pagar: nombres..., y más nombres... Tal vez bastaría con la mitad. pero se ha preferido que quede constancia de que la lámina de caucho facilita su determinación, y de que el estudiante ciego puede reconocerlos y dibujarlos, si el programa así lo impone. Claro que uno de los tipos es decisivo en la Geometría Euclídea –los “ángulos correspondientes”-. Y todos, aparecen en los teoremas y construcciones de polígonos.

Se recoge el prometido tratamiento de las bisectrices, con su procedimiento de trazado a mano alzada y de control háptico.

Y una consideración final sobre el empleo de “marcas gráficas visuales”. de escasa utilidad para el dibujante ciego, pero muy útiles como recurso inclusivo y herramienta de comunicación.



## 5.1 ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

*Ángulo complementario de un ángulo agudo.-  
Es el ángulo -también agudo- con el que suman un ángulo recto.*

En casos extremos:

- El ángulo complementario de un ángulo recto sería un ángulo nulo. Y
- El ángulo complementario de un ángulo nulo sería un ángulo recto.

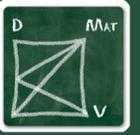
Para trazar (calcular) el ángulo complementario a un ángulo agudo dado, es muy útil:

1º) Desplazar la lámina de caucho hasta situar su vértice en posición “central” (en el plano de simetría del pecho) y uno de sus lados en dirección horizontal (paralelo al plano del pecho) y “sentido positivo” (hacia la derecha).

2º) Se traza la semirrecta con origen el vértice del ángulo, perpendicular al primer lado, siguiendo la dirección del eje de simetría corporal y sentido conveniente: de forma que el segundo de los lados del ángulo dado quede contenido en el ángulo recto.

3º) El ángulo complementario del ángulo dado sería su ángulo contiguo: determinado por este lado interior al ángulo recto y el otro lado -no común-.

(Esto no quiere decir que deba quedar como ángulo contiguo: puede copiarse independiente, en cualquier lugar.)



## 5.2 ÁNGULOS ADYACENTES Y ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS

*Ángulos adyacentes.* - Se dice que dos ángulos son “adyacentes” si tienen un lado común, y el otro –de ambos- forma una recta.

También podría decirse:

- Ángulos adyacentes son los ángulos contiguos que suman o completan un ángulo llano.
- Uno de ellos será obtuso, y el otro agudo. O rectos los dos.
- Si uno es el ángulo “nulo”, el otro será el “llano”. Y viceversa.

Ángulos “suplementarios”.-

- Dos ángulos son “suplementarios” si su suma es un ángulo llano.
- Dos ángulos adyacentes son suplementarios. Pero dos ángulos pueden ser suplementarios aunque no sean adyacentes: no tienen por qué ser contiguos.

Para trazar el ángulo suplementario a otro dado (o un adyacente a éste), resulta muy práctico:

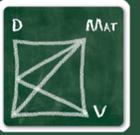
1º) Desplazar la lámina de caucho hasta situar uno de los lados del ángulo dado –o una copia suya- en la posición y dirección preferente.

2º) Trazar la prolongación del primer lado en sentido opuesto -semirecta que completa la recta-.

Bien directamente, bien adquiriendo primero el sentido muscular de la dirección, pasando el lápiz o bolígrafo sobre ese lado sin marcar.

3º) El ángulo adyacente –y suplementario- del ángulo dado es el que queda determinado por esta prolongación y el otro lado del ángulo original.

Si se desea, puede copiarse en otro lugar, por uno de los procedimientos habituales.



## 5.3 ÁNGULOS OPUESTOS POR EL VÉRTICE

*Ángulos opuestos por el vértice.*

*Se dice que dos ángulos son “opuestos por el vértice” si los lados de uno son prolongación de los del otro, en sus sentidos contrarios.*

*O sea: si tienen vértice común y sus lados completan dos rectas que se cortan en ese vértice.*

Para trazar el ángulo opuesto por el vértice a otro dado, resulta muy práctico:

1º) Desplazar la lámina de caucho hasta situar uno de los lados del ángulo dado en la posición y dirección preferente.

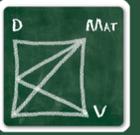
2º) Trazar la prolongación de ese lado en sentido opuesto -semirrecta que completa la recta-.

Bien directamente, bien adquiriendo primero el sentido muscular de la dirección, pasando el lápiz o bolígrafo sobre ese lado, sin marcar, en sentido opuesto.

3º) Repetir estas dos operaciones con el otro lado del ángulo dado.

4º) El ángulo opuesto por el vértice del ángulo dado es el que queda determinado por estas dos nuevas semirrectas, prolongaciones en sentido opuesto de los lados del ángulo dado.

Los ángulos “opuestos por el vértice” son iguales, ya que cada uno es suplementario de un mismo ángulo adyacente.



## 5.4 ÁNGULOS EN LA INTERSECCIÓN DE DOS RECTAS

Al cortarse dos rectas, resultan cuatro ángulos.

Para entendernos mejor, los designaremos por:

1 El situado en la región superior derecha; según la posición del observador.

(Podría servirnos cualquiera de los cuatro, pero esta forma de proceder será útil más adelante.)

2 El ángulo superior izquierda.

3 El ángulo inferior izquierda.

4 El ángulo inferior derecha.

(No es frecuente designar los ángulos por números. Pero interesa resaltar sentido de giro positivo –hacia la izquierda-, reforzado por el orden. Y por ser las cifras mucho más fáciles que las letras para discriminarlas y retenerlas por memoria auditiva.)

1 y 3 son “opuestos por el vértice”; iguales, por consiguiente.

Y lo mismo 2 y 4.

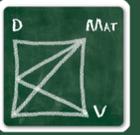
1 y 2 son adyacentes –suplementarios, por tanto.

Y 1 con 4.

Y 2 con 3.

Y 3 con 4.

Como es natural: si las rectas son perpendiculares, los cuatro ángulos son rectos, iguales.



## 5.5 CUANDO UNA RECTA CORTA DOS PARALELAS (I)

Al ser cortadas un par de rectas paralelas por otra –secante-, determinan 8 ángulos.

Para mayor facilidad de localización y entendernos mejor, se desplaza y gira la lámina de dibujo de forma que las paralelas queden en “dirección horizontal” (la del plano del pecho del observador o quien dibuja. Y la secante, aproximadamente centrada.

Designaremos los ángulos por:

- 1, 2, 3 y 4 los determinados por la intersección de la recta secante con la paralela superior. En orden de “giro hacia la izquierda”.
- 5, 6, 7 y 8 los determinados por la intersección de la recta secante con la paralela inferior. En igual orden que los anteriores.
- O sea: a la derecha de la secante quedan los ángulos 1, 4, 5 y 8; y 2, 3, 6 y 7 a la izquierda. (Por este orden, de arriba abajo.)
- Interiores a las paralelas quedan 3, 4, 6 y 5; y 1, 2, 7 y 8 fuera, exteriores.

Comparando pares de ángulos que se encuentren en distinta paralela, y según la posición de uno y otro respecto de la recta secante y el par de paralelas, reciben ciertos nombres:

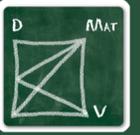
**“Ángulos correspondientes”**.- Como el 1 con el 5, el 2 con el 6, el 3 con el 7, el 4 con el 8.

Situados del mismo lado de la secante, uno interior a las paralelas, y el otro exterior.

Fijándose bien: tienen un lado común (en la misma recta y sentido), y los otros paralelos (y también en el mismo sentido).

**Cada ángulo es igual a su “correspondiente”**.

Son el tipo de pareja más interesante e importante: gracias a ellos, podrá afirmarse si otros pares de ángulos son iguales o suplementarios.



## 5.5 CUANDO UNA RECTA CORTA DOS PARALELAS (II)

**“Ángulos colaterales externos”**.- Como el 1 con el 8, y el 2 con el 7.

Del mismo lado de la secante (“colaterales”), y exteriores a las paralelas.

Uno de los lados Contenido en la misma recta –la secante-, pero en sentidos opuestos. Y el otro paralelo y del mismo sentido. Cada ángulo es suplementario del otro: al ser adyacente –suplementario, por tanto- con el ángulo correspondiente con el otro.

**“Ángulos colaterales internos”**.-

Como el 4 con el 5, y el 3 con el 6.

Del mismo lado de la secante, e interiores a las paralelas.

La relación entre sus lados es análoga a la de los “colaterales externos”.

Cada ángulo es suplementario del otro: adyacente –suplementario- con el ángulo correspondiente con el otro.

**“Ángulos alternos externos”**.- Como el 1 con el 7 y el 2 con el 8

Situados a distinto lado de la secante, y exteriores a las paralelas.

Uno de los lados de cada ángulo está contenido en la misma recta –la secante-, pero como semirrectas de sentidos opuestos. Los otros son paralelos, también de sentidos opuestos.

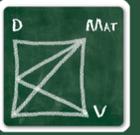
Cada ángulo es igual a su relacionado, por ser “opuesto por el vértice” al ángulo correspondiente del otro.

**“Ángulos alternos internos”**.- Como el 4 con el 6, y el 3 con el 5.

Situados a distinto lado de la secante, e interiores a las paralelas.

Con los lados en misma dirección y sentido que los “alternos externos”.

Cada ángulo es igual a su relacionado, ya que uno de ellos es “opuesto por el vértice” a un ángulo correspondiente con el otro.



## 5.6 BISECTRIZ DE UN ÁNGULO

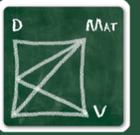
*“Bisectriz de un ángulo” es la recta que lo divide en “dos ángulos iguales”.*  
*Al poder superponerse estos “ángulos o regiones mitad”, equivale a decir:*  
*“Bisectriz de un ángulo” es su eje de simetría.*

Bastaría con dibujar la semirrecta. Pero en muchas construcciones se emplea la bisectriz como recta.

Para trazar la bisectriz de un ángulo dado pueden emplearse diversas técnicas:

a) Una primera, muy rápida: colocando dos de los dedos de la mano auxiliar -índice y corazón, por ejemplo; o índice y pulgar- en la dirección de los lados del ángulo dado, se dibuja directamente la bisectriz; como semirrecta con origen el vértice del ángulo, y procurando mantenerse durante el trazado a igual distancia de aquéllos. Si fuera conveniente, se completa como recta.

b) Desplazando el dibujo hasta que el vértice se sitúe en el eje de simetría corporal -antero-posterior-, y los lados del ángulo simétricos, a derecha e izquierda de dicho eje. A continuación, se traza el eje de simetría corporal -vertical- por el vértice (como semirrecta, o, si fuera preciso, completando la recta).



## 5.7 APROXIMACIÓN AL TRAZAR UNA BISECTRIZ

Para comprobar el grado de aproximación con que se ha trazado la bisectriz de un ángulo, basta plegar por ella la hoja de papel, y observar si coinciden los lados del ángulo o su desviación.

Si coinciden los lados, puede observarse que los dos ángulos resultantes son iguales. sugiriendo un tercer procedimiento para el trazado:

c) Plegado de la hoja de papel.-

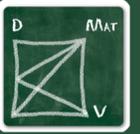
Una técnica muy exacta para obtener la bisectriz de un ángulo consiste en plegar la hoja de papel por el vértice del ángulo dado, de forma que coincidan sus lados, y marcando el dobléz. Si es necesario, trazando después con el lapicero o bolígrafo la línea sobre el dobléz.

Aún podría enunciarse otra definición, relativa a “distancias”... De momento, lo dejamos en propiedad”

Los puntos de la bisectriz se encuentran a igual distancia (equidistan) de los lados del ángulo.

(Tras plegar el ángulo por la bisectriz, bastaría con plegar los lados sobre sí mismos, por un punto cualquiera.)

## 5.8 OTROS ÁNGULOS DE INTERÉS



Además del ángulo recto, por la frecuencia de empleo, conviene reconocer y adquirir práctica en dibujar ciertos ángulos.

Al adjudicar al ángulo recto una medida de referencia de  $90^\circ$ , serían:

a) Ángulo de  $45^\circ$ ; o ángulo mitad de un recto.-

Se obtendría al trazar la bisectriz de un ángulo recto.

b) Ángulo de  $60^\circ$ ; o tercera parte de un ángulo llano.-

Con el vértice centrado –eje de simetría corporal- de un ángulo llano (recta) en posición horizontal –paralela al plano del pecho-, se trazan dos semirrectas simétricas a derecha e izquierda que lo dividan en tres ángulos iguales. Comprobando después la aproximación mediante doble plegado.

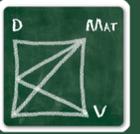
c) Ángulo de  $30^\circ$ ; mitad de un ángulo de  $60^\circ$ , o tercera parte de un ángulo recto.-

Se obtendría –en un primer momento- - trazando la bisectriz de un ángulo de  $60^\circ$ .

Para los tres casos, es muy conveniente:

- Adquirir las medidas antropométricas aproximadas, como apertura de los dedos índice y corazón (medio) de la mano auxiliar.
- Adquirir práctica en dibujarlos directa e independientemente, colocando el primero de sus lados en posición “horizontal” (dirección del plano del pecho) y “sentido positivo”. (con el vértice a la izquierda; de izquierda a derecha).

## 5.9 CONSIDERACIONES SOBRE EL EMPLEO DE MARCAS GRÁFICAS ORDINARIAS



Aquí se han empleado mayúsculas y cifras en caracteres visuales, ordinarios.

Para el dibujo, las marcas son prescindibles, aunque facilitan la comunicación en el aula.

Es más –a nuestro juicio- el estudiante ciego debe conocer los caracteres ordinarios en relieve: cifras, mayúsculas y minúsculas. Ya que aparecerán con frecuencia en señales y rótulos visuales en relieve.

Y debe aprender también a representarlos: como herramienta ocasional de comunicación con familiares y compañeros videntes. Y formar parte del desarrollo de habilidades hápticas. Como destreza instrumental, de reconocimiento de formas.

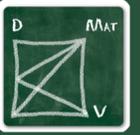
Pero sin esforzarse en adquirir una destreza innecesaria: a fin de cuentas, sólo los empleará ocasionalmente: **su sistema de lectura adecuado es el braille.**

Nada impide marcar en relieve la mayúscula que pudiera elegirse para designar puntos: puntos aislados, orígenes de semirrectas, ángulos, extremos de segmentos, vértices...

Desde luego, podrá prescindirse en los niveles más elementales, con niños y adultos que perdieron la vista sin haber sido alfabetizados.

Los caracteres que se empleen deben reunir un mínimo de cualidades hápticas y didácticas:

- Designar con preferencia y precisión los objetos según su posición, antes que marcarlos con caracteres.
- No emplear composiciones (palabras, cantidades, etc.), sino caracteres individuales.
- Emplear en una misma representación caracteres de una misma serie o familia. (Por ejemplo: cifras o letras latinas; pero no ambas al mismo tiempo.)
- En la medida de lo posible, emplear siempre los mismos caracteres; o un rango reducido, dentro de esa familia.
- Tipos sencillos y fácilmente discriminables. (Ver, por ejemplo: verdana, arial... Sin sarifas.)
- Caracteres de tamaño suficientemente grande y bien marcados, que eviten confusiones táctiles.
- Preferencia de uso: cifras – mayúsculas latinas – minúsculas latinas...



## 5.10 OBSERVACIONES

- a) Se ha tomado como definición de ángulo la más simple e intuitiva: como región del plano, independientemente de su orientación. Y sin entrar en cuestiones de frontera (que se presuponen “cerradas”). O como “par de semirrectas de origen común, sin considerar el orden. Es decir:
- b) No se contemplan los “ángulos negativos”. Concepto propio –por lo general- de los niveles de Educación Secundaria. Por otra parte: no exigirían técnicas de dibujo diferentes de las aquí recogidas.
- c) Tampoco se consideran los ángulos mayores al “ángulo completo” –superiores a 4 rectos-. Objeto más bien de la Física, al tratar de los movimientos de rotación,.
- d) No se tratan la multiplicación ni la división de un ángulo por escalares. (Excepción hecha de los efectos del trazado de la bisectriz.) Son conceptos propios del Dibujo Técnico, más que del área de Matemáticas.
- e) Sólo se mencionan como unidades de medida de ángulos el “recto” y su submúltiplo el “grado sexagesimal”. Ya que los conceptos de “radián” y “grado centesimal” en nada afectan a las técnicas de dibujo. En este mismo sentido:
- f) No se contempla el uso del “transportador de ángulos”. (Aunque existan y puedan adaptarse modelos accesibles.) Sin otra utilidad en Matemáticas que practicar y adquirir un cierto sentido de la aproximación más fina de medidas de ángulos.