

DISVIMAT

El estudiante ciego dibujando en el aula de Matemáticas

*Dibujo sobre lámina de caucho*

4. Ángulos: tipos y operaciones.

*©José Enrique Fernández del Campo*

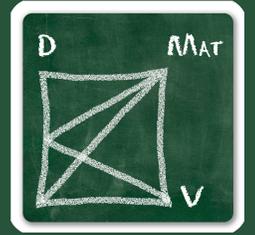
*[jefdelcampo@gmail.com](mailto:jefdelcampo@gmail.com)*

*<http://disvimat.net>*

Realización: *José A. Valgañón Sánchez*

*Madrid, 2019*

# ÍNDICE



Presentación

4.1 Trazado de ángulos

4.2 Ángulos iguales, menores y mayores

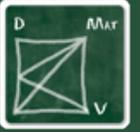
4.3 Comparación háptica de ángulos

4.4 Clasificación de ángulos

4.5 Otros ángulos, menos frecuentes

4.6 Ángulos contiguos y adición de ángulos

4.7 Ángulo diferencia, o sustracción de ángulos



## PRESENTACIÓN

Los ángulos son determinantes esenciales -aunque no exclusivos- de las formas geométricas. Su exploración, reconocimiento y trazado requiere habilidades hápticas importantes.

Si el trazado de rectas y semirectas exigía casi en exclusiva destrezas de manejo del lápiz o bolígrafo y control de dirección y presión, el trabajo con ángulos reclama el dominio del espacio bidimensional. La propia definición de ángulo como "región del plano" lo pone de manifiesto desde el principio.

La mano auxiliar empieza a jugar un papel mucho más activo; decisivo, en algunos momentos. Y también la "referencia corporal": plano del pecho (fijando la horizontal) y eje de simetría corporal (para la vertical).

Como no podía ser de otra forma, el protagonista principal será el "ángulo recto". Definido por la perpendicularidad de sus lados. Como cuadrante: cada uno de los cuatro iguales, inseparables de la perpendicularidad de rectas en el plano. A él se referirán todos los tipos de ángulos.

Se contemplan las operaciones básicas de adición y sustracción de ángulos. No plantean dificultades de dibujo, pero sí de descripción verbal de la operatoria.

En su momento, también se contemplará el trazado de la bisectriz y cómo apreciar mejor su grado de aproximación.



## 4.1 TRAZADO DE ÁNGULOS

*Ángulo es cada una de las dos regiones de plano determinadas por un par de semirrectas de origen común. El punto origen de las semirrectas se llama “vértice”, y las semirrectas “lados del ángulo”. El vértice suele designarse con una letra mayúscula, que sirve también para designar al ángulo.*

Para dibujar un ángulo, se trazan dos semirrectas (lados) de origen común (vértice), marcando bien claramente éste al trazar la primera, de forma que permita localizarlo fácilmente y retomarlo como origen de la segunda.

Ni siquiera hace falta que sean semirrectas, porque lo que importa es la “apertura”: basta con dos segmentos de origen común. El extremo libre podría si se desea prolongarse en semirrecta... (Los segmentos son porciones de recta con extremos: origen y fin.)

En realidad, quedan determinadas dos regiones del plano:

- El ángulo correspondiente a la menor se dice que es un “ángulo cóncavo”. (De “concavidad”, o “cueva”...)
- El ángulo correspondiente a la mayor se dice que es un “ángulo convexo”.

Si hay riesgo de saber de cuál de los dos ángulos se está hablando, suele dibujarse un arco o marca entre los lados de ese ángulo. No es necesario dibujarlo para un ángulo cóncavo. Pero se dibuja siempre para un ángulo convexo.



## 4.2 ÁNGULOS IGUALES, MENORES Y MAYORES

Decimos que:

“Dos ángulos son iguales” si pudieran coincidir las dos regiones de plano al superponerlas.

O, también: desplazando uno sobre otro, de forma que coincidan los vértices y uno de los lados, podría hacerse coincidir también el otro lado.

“Un ángulo es menor que otro”, cuando al superponer sus regiones la del primero siempre queda contenida en la del segundo.

O, también: desplazando uno sobre otro, de forma que coincidan los vértices y uno de los lados, el otro lado del primer ángulo –el menor- quedaría interior –contenido- en el segundo ángulo.

### **Procedimiento manipulativo.**

Marcando en exceso los lados de uno de los ángulos, podría después desprenderse fácilmente su porción de papel. Y así, desplazarla sobre el otro ángulo, haciendo coincidir los vértices y uno de los lados, para comprobar si son iguales, o cuál de ellos es menor.

(Esto arruinaría el dibujo, pero es muy clarificante en un primer momento.)



## 4.3 COMPARACIÓN HÁPTICA DE ÁNGULOS

Para comparar ángulos dibujados con ayuda de la lámina de caucho –o representados por cualquier otro procedimiento-, pueden emplearse diversas técnicas:

a. Estimación unimanual:

Recorriendo simultáneamente los lados de cada ángulo con dos dedos de una misma mano, partiendo del vértice y con una misma velocidad. (Si fuera necesario, rotando o desplazando la lámina de caucho, para que la comparación se haga en la misma posición.)

Se estima como menor el ángulo para el que los dedos se separan más lentamente.

b. Recurso a la referencia corporal.

Para cada ángulo se gira la lámina de caucho, hasta que uno de los lados quede en dirección horizontal (paralelo al plano del pecho) y sentido positivo (de izquierda a derecha, a partir del vértice). Y de forma que el otro lado quede en la parte superior –ángulos cóncavos- o inferior –convexos-.

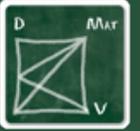
Será menor la región –ángulo- cuyo segundo lado oblicuo está contenido en la otra.

c. Comparación antropométrica, por traslado de medida de uno de ellos.

Colocando los dedos índice y corazón –o pulgar e índice, según la apertura del ángulo-, de forma que coincidan aproximadamente con los lados del ángulo. Procurando que el vértice quede justo en la unión de los dedos.

Para esto último, puede ayudar el “plantar” el lápiz o bolígrafo verticalmente sobre el vértice.

## 4.4 CLASIFICACIÓN DE ÁNGULOS



Los “ángulos cóncavos”, según sea su “apertura” o porción de plano, reciben nombres distintos:

*“Ángulos rectos”*: sus lados son perpendiculares. Si los lados se prolongaran en rectas, serían perpendiculares, dividiendo al plano en cuatro regiones iguales.

El “ángulo recto” tiene una importancia máxima: se toma como referencia para los demás tipos de ángulos, y como unidad para medir su apertura. Como resulta demasiado grande, se emplea una subdivisión, submúltiplo o parte suya: el “grado sexagesimal”, su  $1/90$  parte. Se representa con un símbolo especial. O sea: un ángulo recto equivale a  $90^\circ$  (grados sexagesimales).

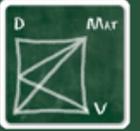
- *“Ángulos agudos”*: los menores que los rectos.
- *“Ángulos obtusos”*: los mayores que los rectos.

Para reconocer al principio si un ángulo es recto o de qué tipo (en general), el procedimiento más seguro consiste en girar la lámina de caucho, hasta que uno de los lados del ángulo quede en dirección horizontal (paralelo al plano del pecho) y sentido positivo (de izquierda a derecha, a partir del vértice: con el vértice a la izquierda). Con el otro lado del ángulo alejándose del pecho.

El ángulo será:

- recto si la dirección del otro lado es la del plano de simetría corporal (o sea: vertical;
- agudo si se dirige hacia la derecha;
- obtuso, si hacia la izquierda

## 4.5 OTROS ÁNGULOS, MENOS FRECUENTES



Hay también otros tipos de ángulos: un tanto extraños, porque sus lados están alineados o coinciden.

### **Ángulos llanos.-**

*Son los que sus lados constituyen una recta. Es decir: abarcan un “semiplano”. Para no confundirlos con simples rectas con un punto señalado, se marca el arco que determina la región de plano a la que se refiere.*

### **Ángulos nulos.-**

Sus lados son coincidentes: el ángulo se reduce a “una semirrecta”. Puede decirse que determinan una región vacía.

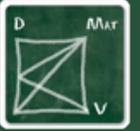
### **Ángulos completos.-**

Sus lados son coincidentes: el ángulo se reduciría a “una semirrecta”. Como el “ángulo nulo”, y se confundirían, por no ser porque siempre se indica el arco que lo determina (que, en este caso, es una circunferencia centrada en el vértice). Abarca todo el plano. (De ahí el nombre de “completo”).

En un único dibujo, pueden trazarse ejemplos de todos los tipos de ángulos, con mismo vértice y un lado común. De menor a mayor:

- Nulo, agudo, recto, obtuso,
- llano, convexo, completo.

## 4.6 ÁNGULOS CONTIGUOS Y ADICIÓN DE ÁNGULOS



*Se dice que dos ángulos son “contiguos” si tienen el mismo vértice y un lado común; pero sus regiones no se superponen: son “contiguas”, están una al lado de la otra.*

Para dibujar dos ángulos contiguos es suficiente trazar tres semirrectas de origen común –el vértice de los ángulos-, y marcar cuáles de las regiones resultantes corresponden a los dos ángulos a considerar.

### **Adición de ángulos.**

*Dados dos ángulos, su “adición o suma” es el resultado de trazar reproducciones suyas como “ángulos contiguos”.*

Con la lámina de caucho, es muy práctico:

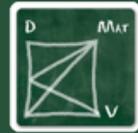
1º) reproducir –si es preciso- el ángulo mayor.

2º) Desplazar la lámina de caucho hasta que quede “centrado” el vértice de este primer ángulo. Y girarla después, para que aquél que será lado común (segundo lado del ángulo mayor recién copiado) quede en posición horizontal (paralelo al plano del pecho) y “sentido positivo” (hacia la derecha).

3º) Reproducir el menor de los ángulos dados, tomando como primer lado el que será lado común, trazando el segundo lado exterior a la región del primer ángulo. Las dos copias de los ángulos sumandos quedan entonces como ángulos contiguos.

4º) El ángulo suma o adición queda determinado por los lados no comunes.

## 4.7 ÁNGULO DIFERENCIA, O SUSTRACCIÓN DE ÁNGULOS



*Dados dos ángulos, su “diferencia o sustracción” es el ángulo que sumado con el menor completaría el mayor. Evidentemente: tanto da hablar de los ángulos originales o de copias suyas, ya que serían iguales.*

Para obtener la sustracción o diferencia de dos ángulos con la lámina de caucho, es muy práctico seguir el siguiente procedimiento:

1º) reproducir –si es preciso- el ángulo mayor. (Sería el llamado “ángulo minuendo”).

2º) Desplazar –si es preciso- la lámina de caucho hasta que quede “centrado” el vértice de este ángulo copia. Y girarla después, para que el primer lado quede en posición horizontal (paralelo al plano del pecho) y “sentido positivo” (hacia la derecha).

3º) Reproducir el menor de los ángulos dados (“sustraendo”), tomando como primer lado el mismo que el ángulo mayor, y trazando el segundo lado interior a la región del primer ángulo.

4º) El ángulo diferencia o sustracción queda determinado por los lados no comunes al “minuendo” y al “sustraendo”.

El “ángulo sustraendo” y el “ángulo diferencia” quedan entonces como “ángulos contiguos”; que, sumados, darían el “ángulo minuendo” –el mayor-.